随机点过程

戴永隆 编著

中山大学出版社

随机点过程

戴永隆编著

中山大学出版社

随 机 点 过 程

戴永隆编著

*

中山大学出版社出版
中山大学印刷厂印刷
广东省新华书店发行

*

开本：787×1092×1/16　印张：$14\frac{1}{4}$　字数：308,000
1984年9月第一版　1984年9月第一次印刷
印数　1—4,400
号书：13339·3　定价：2.00元

前　言

欣钦的“公用事业理论的数学方法”被认为是随机点过程一般理论研究的开端。该书的许多基本概念，例如有序性、无后效性、平稳性、强度、Palm 函数等，一直为后人所引用并作为深入研究的对象。而以抽象空间为相空间的随机点过程的一般理论则是六十年代末和七十年代才建立起来的。K. Matthes, J. Kerstan 和J. Macke 合著的“无穷可分点过程”，以及O. Kallenberg 所著“随机测度”，系统地总结了这一时期的工作。近年来将点过程一般理论应用于排队论、分支过程、随机几何以及Gibbs点过程等分支的研究甚为活跃。

本书的目的是给概率论专业研究生提供一个基本教材，也可供大专院校理工科高年级学生参考。读者可以通过本书作为桥梁，以较短时间掌握随机点过程的基本内容和研究方法，从而达到能够阅读当前文献并从事相应的研究工作的目的。因此本书取材仅限于在理论上已经相当完备，然而又是进一步阅读这一分支学科近期文献和开展某些研究所必须了解的基本内容。

本书的写作和出版都是在梁之舜教授的热情支持和鼓励之下进行的。在八二年暑假高等学校概率论讨论班上，许多同志对本书原稿提出了许多宝贵意见，特别是严士健教授，厉则治、潘一民、刘秀芳副教授以及陈培德、丁万鼎、马志民、邹捷中等同志对本书原稿的一些错误和不当之处都提出了具体修改意见。裴祥同志认真校对并誊写了全部书稿。作者在此向上述同志表示衷心感谢。

由于水平所限，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

戴永隆

1984年1月

目 录

第五章 混合型Poisson 分布

第六章 平稳点过程

第一章 预备知识

这一章是有关学习点过程必不可少的预备知识。从内容看，完全是测度论的一些补充。但在一般测度论著作中是不容易找到这些材料的。

§1. 局部单调类定理

1. 本书恒设(X,ρ_X)是可分完备距离空间。以$\mathscr{A}$记X的全部开集所产生的σ-代数(Borel集类)；以$\mathscr{B}$记$\mathscr{A}$中全部有界集组成的类，即$A\in\mathscr{B}$则意味着$A\in\mathscr{A}$，且满足

$$\sigma(A)=\sup_{a,b\in A}\rho_X(a,b)<\infty.$$

显然，$\mathscr{B}$是一个环。当(X,ρ_X)是有界距离空间时，$\mathscr{B}=\mathscr{A}$；但当(X,ρ_X)不是有界距离空间时，$\mathscr{B}$不是σ-环。虽然$\mathscr{B}$不是σ-环，但对任意$A\in\mathscr{B}$，$A\cap\mathscr{B}$却是A的子集σ-代数。$\mathscr{B}$的这个性质对我们以后的讨论很有用处。

2. 定义 $\mathscr{B}$的子环Γ称为局部σ-环，如果它满足下列两个条件：

1） 对Γ中的任意序列(A_n)，$\bigcap_n A_n\in\Gamma$；

2） 对Γ中的序列(A_n)，若$\bigcup_n A_n\in\mathscr{B}$，则也有$\bigcup_n A_n\in\Gamma$。

显然，$\mathscr{B}$本身是局部σ-环。需要注意的是，如果Γ是局部σ-环，它不一定是σ-环，除非(X,ρ_X)是有界距离空间。然而，对任意$A\in\Gamma$，$A\cap\Gamma$是A的子集σ-代数。

3. 定义 称$\mathscr{B}$的子集类Γ是局部单调类，如果它满足下列两条件：

1） 若$A_n\in\Gamma$，$A_n\downarrow$，则$\bigcap_n A_n\in\Gamma$；

2） 若$A_n\in\Gamma$，$A_n\uparrow$并且$\bigcup_n A_n\in\mathscr{B}$，则$\bigcup_n A_n\in\Gamma$。

局部单调类不一定是单调类，除非(X,ρ_X)是有界距离空间。

4. 在定义2中，条件1)其实可由2)推出。事实上，设$(A_n)\subset\Gamma$，由于2)以及Γ是环的假定可知$\bigcup_n\{A_1\setminus(A_1\cap A_n)\}\in\Gamma$，从而

$$\bigcap_n A_n=A_1\setminus\bigcup_n\{A_1\setminus(A_1\cap A_n)\}\in\Gamma.$$

任给$\Gamma\subset\mathscr{B}$，包含集类Γ的最小局部单调类记作$L_m(\Gamma)$；包含集类Γ的最小局部σ-环记作$L_\sigma(\Gamma)$。

下面的定理是单调类定理的推广。

5. 局部单调类定理 设Γ_1，Γ_2是$\mathscr{B}$的两个子集类，并且$\Gamma_1\subset\Gamma_2$。如果Γ_1是环而Γ_2是局部单调类，则$L_\sigma(\Gamma_1)\subset\Gamma_2$。

证明 我们只须证明 $L_m(\Gamma_1)$是环。因为如果$L_m(\Gamma_1)$是环，则也必是局部σ-环，从而推出$L_\sigma(\Gamma_1)\subset L_m(\Gamma_1)\subset\Gamma_2$.对任意固定的$A\in L_m(\Gamma_1)$，以$L'(A)$记$L_m(\Gamma_1)$中所有具有如下性质的集合$B$：它使得集合$B\backslash A, A\backslash B, A\cup B$都属于$L_m(\Gamma_1)$。容易看出，$L'(A)$是局部单调类，并且$B\in L'(A)$和$A\in L'(B)$是等价的。由于$\Gamma_1$是环，所以当$A\in\Gamma_1, B\in\Gamma_1$时有$B\in L'(A)$，从而$\Gamma_1\subset L'(A)$，但$L_m(\Gamma_1)$是包含$\Gamma_1$的最小局部单调类，所以$L_m(\Gamma_1)\subset L'(A)$。这说明当$A\in\Gamma_1$固定时对一切$B\in L_m(\Gamma_1)$都有$B\in L'(A)$，故也有$A\in\Gamma'(B)$.于是又得：对任意固定的$B\in L_m(\Gamma_1)$也有$L_m(\Gamma_1)\subset L'(B)$.这就说明，对于$L_m(\Gamma_1)$中的任意两个元素$A,B$都有$B\in L'(A)$。由$L'(A)$的定义知道$L'_m(\Gamma_1)$是环。定理得证。

由这个定理立即推出：如果Γ是$\mathscr{B}$的子环并且$\mathscr{B}$是由Γ产生的，则$L_m(\Gamma)=L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$。

§2 局部有限测度空间

6. 设μ是$(X,\mathscr{A})$上的一个测度，如果对任意的$A\in\mathscr{B}$，$\mu(A)<\infty$，则称μ是$(X,\mathscr{A})$上的局部有限测度。于是对任意的$A\in\mathscr{B}$，μ是$(A,A\cap\mathscr{B})$上的全有限测度。

记$(X,\mathscr{A})$上的全体局部有限测度为M。

如果$\mu\in M$并且对任意的$A\in\mathscr{B}$，$\mu(A)$取非负整数值，则称μ是$(X,\mathscr{A})$上的计数测度。

记$(X,\mathscr{A})$上的全体计数测度为N。

对任意的$a\in X, A\in\mathscr{A}$，令

$$\delta_a(A)=1_A(a),$$

其中$1_A(\cdot)$是A的示性函数。于是$\delta_a(\cdot)\in N$.映射$a\frown\delta_a$是X到N内的一一映射。

7. 定理 对任意的$\mu\in N$，集合$\{a: a\in X,\mu(a)>0\}$是有限或可列集，并且

$$\mu=\sum_{a\in X,\mu(a)>0}\mu(a)\delta_a,$$

其中的$\mu(a)$是将a看作集合，即$\mu(a)=\mu(\{a\})$。

证明 取$A_n\in\mathscr{B}, A_n\uparrow X$.由于$\mu$是计数测度，所以$A_n\cap\{a: a\in X,\mu(a)>0\}$的个数最多等于$\mu(A_n)$，故至多是有限集，因此$X\cap\{a: a\in X,\mu(a)>0\}$至多是可数集。现记

$$\mu'(B)=[\mu-\sum_{a\in X,\mu(a)>0}\mu(a)\delta_a](B),\qquad B\in\mathscr{B}.$$

显然$\mu'\in N$，并且对任意的$a\in X$，$\mu'(a)=0$.现证$\mu'\equiv0$（即μ'是$(X,\mathscr{A})$上的零测度）。假定$\mu'\neq0$.由于X可用半径为1的可数开球列$\{S_1(b_n)\}$覆盖，故存在$a_1\in X$，使$\mu'(S_1(a_1))>0$；再以半径是$\frac{1}{2}$的开球列覆盖$S_1(a_1)$，则存在$a_2\in X$使$\mu'(S_1(a_1)\cap S_{\frac{1}{2}}(a_2))>0$。如此继续下去，得到$a_1,a_2,\cdots$，使

$$\mu'(S_1(a_1)\cap\cdots\cap S_{2^{-n}}(a_{n+1}))>0.$$

然而易知(a_n)是(X,ρ_X)中的Cauchy序列，因为

$$\rho_X(a_n,a_{n+m})\leqslant\rho_X(a_n,a_{n+1})+\rho_X(a_{n+1},a_{n+2})+\cdots+\rho_X(a_{n+m-1},a_{n+m})$$

$$\leqslant\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^n}+\cdots+\frac{2}{2^{n+m-2}}<\frac{1}{2^{n-3}}.$$

令$m\to\infty$得$\rho_X(a_n,a)\leqslant 2^{-n+3}$, $n=1,2,\cdots$。设$x\in S_{2^{-n}}(a_{n+1})$则

$$\rho_X(x,a)\leqslant\rho_X(x,a_{n+1})+\rho_X(a_{n+1},a)\leqslant 2^{-n}+2^{-n+2}<2^{-n+3},$$

故 $x\in S_{2^{-n+3}}(a)$.从而$S_{2^{-n}}(a_{n+1})\subset S_{2^{-n+3}}(a)$。由此可证

$$\mu'(S_{\frac{1}{n}}(a))\geqslant 1,\text{故}\mu'(a)=\inf_n \mu'(S_{\frac{1}{n}}(a))\geqslant 1,$$

这与上面的$\mu'(a)=0$（对任意的$a\in X$)矛盾。证毕

8. 定义 在M上引进σ-代数$\mathbf{M}$：它是使得全体如下形式的由M到$[0,\infty)$的映射

$$\mu\frown\mu(A),\qquad A\in\mathscr{B},$$

都为可测的最小σ-代数。

$(M,\mathbf{M})$称为局部有限测度空间。

9. 引理 $N\in\mathbf{M}$.

证明 以$\mathscr{U}$记(X,ρ_X)中由有界开集作成的可数基，以Γ表示$\mathscr{U}$所产生的环，显然$\Gamma\subset\mathscr{B}$并且Γ至多是可数的集类。令$Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$,于是

$$\bigcap_{A\in\Gamma}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}\in\mathbf{M},$$

以Γ_1记满足下面条件的$\mathscr{B}$的子类：$\Gamma_1\subset\mathscr{B}$,并且$B\in\Gamma_1$当且仅当

$$\{\mu:\ \mu\in M,\mu(B)\in Z_+\}\supset\bigcap_{A\in\Gamma}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}$$

显然$\Gamma_1\supset\Gamma$，并且Γ_1是局部单调类。由于$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$所以由局部单调类定理知$\mathscr{B}=\Gamma_1$。从而

$$N=\bigcap_{A\in\mathscr{B}}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}=\bigcap_{A\in\Gamma}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}\in\mathbf{M}.$$ 证毕。

由于这个结果，我们令

$$\mathbf{N}=N\cap\mathbf{M}$$

于是$(N,\mathbf{N})$是可测空间，称为计数测度空间。

不难验证，$\mathbf{N}$是使得所有如下的映射为可测的最小σ-代数：

$$\mu\frown\mu(A),\qquad A\in\mathscr{B}.$$

下面的引理虽然简单，今后将常用到。

10. 引理 映射$a\frown\delta_a$是从$(X,\mathscr{A})$到$(N,\mathbf{N})$内的双方可测映射。

证明 记映射$a\frown\delta_a$为f,由前段关于$\mathbf{N}$的说明可知，对于任意的$A\in\mathscr{B}$及任意的$k\in Z_+$,集合$\{\mu:\ \mu\in N,\mu(A)=k\}$关于$f$的逆映像视$k=0,k=1$或$k\geqslant 2$而分别是$\mathscr{A}$中的元$A^c$, A或ϕ.于是知道$f^{-1}(\mathbf{N})\subset\mathscr{A}$.

另一方面，对任意的$A\in\mathscr{A}$，取一串$A_n\in\mathscr{B}$, $A_n\uparrow X$,仍由$\mathbf{N}$的构造可知

$$\{\mu:\ \mu\in N,\mu(A)\geqslant k\}=\bigcup_n\{\mu:\mu\in N,\mu(A\cap A_n)\geqslant k\}\in\mathbf{N},\quad k=1,2.$$

于是$\{\mu:\mu\in N,\mu(A)=1\}=\{\mu:\mu\in N,\mu(A)\geqslant 1\}\backslash\{\mu:\mu\in N,\mu(A)\geqslant 2\}$属于$\mathbf{N}$。这说明对任意的$A\in\mathscr{A}$有

$$f(A)=\{\mu:\mu\in N,\mu(A)=1,\mu(X)=1\}\in\mathbf{N}.$$ 引理证毕。

11. 对任意的$\mu\in M$, $A\in\mathscr{A}$,记

$$A\mu(\cdot)=\mu(\cdot\cap A)$$

并称之为μ在A上的限制。

显然，固定$A\in\mathscr{A}$，映射$\mu\frown A\mu$是$(M,\mathbf{M})$到自身的可测映射。这个映射在N上的限制就是$(N,\mathbf{N})$到自身的可测映射。

对固定的$A\in\mathscr{A}$，我们以${}_A\mathbf{N}$记如下集合族

$$\{\mu:\mu\in N,\mu(B)=k\},B\in A\cap\mathscr{B},k\in Z_+,$$

所产生的σ-代数。

§3. 弱收敛

12. 在研究点过程的收敛性时，弱收敛、局部弱收敛和淡收敛(vague收敛)都是很有用的工具。本书假定读者已经有弱收敛的基本知识(关于弱收敛的一般理论可见P. Billingsley(1968)第一章)。我们只着重讨论本书后面将广泛用到的局部弱收敛。为了对这三种收敛性有比较清楚的认识，有必要将它们作一番统一的叙述，以便比较。在给出它们的定义前，先引进一些记号。

如前所述，$\mathscr{A}$表示(X,ρ_X)的全体Borel集；$\mathscr{B}$表示$\mathscr{A}$中全体有界集；又以$\mathscr{B}_K$记$\mathscr{A}$中全体相对紧集，即$A\in\mathscr{B}_K$表示$A\in\mathscr{A}$，并且A的闭包$\bar{A}$是紧集。

显然有

$$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}\supset\mathscr{B}_K.$$

以$\mathscr{F}_b$记(X,ρ_X)上定义的全体有界连续函数；以$\mathscr{F}$记(X,ρ_X)上定义的全体有有界支承的有界连续函数，即$f\in\mathscr{F}$当且仅当$f\in\mathscr{F}_b$且$\{f\neq0\}$的闭包是有界集；又以$\mathscr{F}_K$记(X,ρ_X)上定义的全体具有紧支承的有界连续函数，即$f\in\mathscr{F}_K$当且仅当$f\in\mathscr{F}_b$且集$\{f\neq0\}$的闭包是紧集。

显然有

$$\mathscr{F}_b\supset\mathscr{F}\supset\mathscr{F}_K.$$

我们以M_b记$(X,\mathscr{A})$上的全体全有限测度；如前所述，以M记$(X,\mathscr{A})$上的全体局部有限测度；此外，以M_K记$(X,\mathscr{A})$上的全体紧有限测度。这里称$(X,\mathscr{A})$上的测度μ为紧有限的，如果对任意的$A\in\mathscr{B}_K$，有$\mu(A)<\infty$。

显然有

$$M_b\subset M\subset M_K.$$

13. 定义 设$(\mu_n)\subset M_b$，称(μ_n)弱收敛于$\mu\in M_b$，如果对于所有的$f\in\mathscr{F}_b$有

$$\lim_n\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

设$(\mu_n)\subset M$，称(μ_n)局部弱收敛于$\mu\in M$，如果对所有的$f\in\mathscr{F}$有

$$\lim_n\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

设$(\mu_n)\subset M_K$，称(μ_n)淡收敛于$\mu\in M_K$，如果对所有的$f\in\mathscr{F}_K$有

$$\lim_n\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

(μ_n)弱收敛于μ记作 $\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} \mu$;

(μ_n)局部弱收敛于μ记作 $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$;

(μ_n)淡收敛于μ记作 $\mu_n \overset{v}{\Longrightarrow} \mu$.

必须注意，弱收敛和淡收敛的概念仅只依赖于空间(X,ρ_X)的拓扑结构，而不依赖于距离的选取；而局部弱收敛则恰恰是依赖于距离的选取。

14. 定理 设(X,ρ_X)是可分完备距离空间。

1) 对任意的$\mu\in M_b$, $(\mu_n)\subset M_b$, $\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} \mu$与$\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$等价，当且仅当$(X,\rho_X)$是有界距离空间；

2) 对任意的$\mu\in M$, $(\mu_n)\subset M$, $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$与$\mu_n \overset{v}{\Longrightarrow} \mu$等价，当且仅当$(X,\rho_X)$中的任意有界集都是相对紧的；

3) 对任意的$\mu\in M_b$, $(\mu_n)\subset M_b$, $\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} \mu$, $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$与 $\mu_n \overset{v}{\Longrightarrow} \mu$三者一致，当且仅当$(X,\rho_X)$是紧空间。

证明 只证1)，2)、3)可类似地证明。当(X,ρ_X)是有界距离空间时，两种收敛性的等价性是明显的。今设M_b中任意的局部弱收敛序列必也是弱收敛序列，要证(X,ρ_X)是有界距离空间。假定(X,ρ_X)不是有界距离空间，则存在点列$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，使$\rho_X(x_n,x_0)\to\infty$。令

$$\mu_n(\cdot)=\delta_{x_n}(\cdot),\quad n=1,2,\cdots,$$

则$(\mu_n)\subset M_b$。又令$\mu=0$（零测度），则对任意的$f\in\mathscr{F}$，有$\lim\limits_n\int fd\mu_n=\int fd\mu=0$，从而

$\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$。然而$\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} \mu$不成立，因为当$f\equiv1$时，$\int fd\mu_n=1$ 而 $\int fd\mu=0$。这与假设矛盾。

15. 例 考虑实数序列$(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2<\infty$作成的距离空间$l_2$，其中距离定义为：

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_n (x_n-y_n)^2}$$

这里$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$。$(l_2,\rho)$是可分完备距离空间。在这个空间中

$$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}\supset\mathscr{B}_K$$

记
$$e_n=(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}n\text{位}}}{1},0,\cdots)$$

令$\mu_n=\delta_{e_n}$, $\mu=0$，则$\mu_n \overset{v}{\Longrightarrow} \mu$但$\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$, $\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} \mu$都不成立。

若记

$$e_n' = (0, \cdots, 0, n, 0, \cdots)$$

$$\uparrow$$

第n位

并令$\mu_n = \delta_{e_n'}$, $\mu = 0$，则$\mu_n \stackrel{v}{\Longrightarrow} \mu$并且$\mu_n \stackrel{l}{\Longrightarrow} \mu$但$\mu_n \stackrel{w}{\Longrightarrow} \mu$不成立。

这个简单的例子指出，在(l_2, ρ)中，三种收敛性都不相同。

下面不加证明地引述弱收敛的几个著名结果。首先给出一个定义。设$\mu \in M$，$A \in \mathscr{A}$，如果有$\mu(\partial A) = 0$（此处∂A表示A的边界），则称A是μ连续集。全体μ连续集记作$\mathscr{A}_\mu$。

16. 定理 设$(\mu_n) \subset M_b$，则下述命题等价

1) $\mu_n \stackrel{w}{\Longrightarrow} \mu$；

2) $\lim\limits_n \mu_n(A) = \mu(A)$，　凡$A \in \mathscr{A}_\mu$；

3) $\lim\limits_n \sup \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$，凡闭集$F$，并且

$\lim\limits_n \mu_n(X) = \mu(X)$；

4) $\lim\limits_n \inf \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$，凡开集$G$，并且

$\lim\limits_n \mu_n(X) = \mu(X)$。

这个定理是关于弱收敛的基本定理，其证明见 Billingsley (1968) 第一章定理2.1.

下面的两个定理是著名的 Прохоров 定理。

17. 定理 在M_b上存在一个距离ρ_{M_b}，使得(M_b, ρ_{M_b})是可分完备距离空间，M_b中由距离ρ_{M_b}所产生的拓扑，正好是M_b中由弱收敛所产生的拓扑。（参阅 Прохоров (1956)）。

18. 定理 距离空间(M_b, ρ_{M_b})中的子集Y是相对紧的，当且仅当

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(X) < \infty$$

并且对任意的$\epsilon > 0$，存在紧集K_ϵ使

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(K_\epsilon^c) < \epsilon.$$

（参阅 Billingsley (1968)第一章定理6.1，6.2）。

上述定理中的相对紧性，可以有另外一种提法：设Y是M_b的子集，称Y在弱收敛意义下相对紧，或称为弱相对紧，如果对Y中的任意序列$(\mu_n) \subset Y$，可以抽出子序列(μ_{n_k})，使

$$\mu_{n_k} \stackrel{w}{\Longrightarrow} \text{某个 } \mu \in M_b.$$

这里所谓的弱相对紧集与定理18中的ρ_{M_b}意义下的相对紧集是一回事（参阅定理17）。

下一节的目的是将定理16—18改写为局部弱收敛的形式，这对我们今后研究点过程与随机测度的收敛性是很有用处的。

§4. 局部弱收敛

19. 引理 设 $G\subset X$ 是任意的有界开集，则存在有界开集列 (G_n)，$G_n\uparrow G$ 和一串 (f_n)，$f_n\in\mathscr{F}$，使

$$1_G\geqslant f_n\geqslant 1_{G_n}\uparrow 1_G.$$

证明 令

$$G_n=\left\{a:\rho_X(a,G^c)>\frac{1}{n}\right\},$$

其中 G^c 是 G 的余集。于是 G_n 是开集，$G_n\uparrow G$。令

$$f_n(a)=1-n(\rho_X(a,\bar{G}_n)\wedge n^{-1}),$$

其中 $\bar{G}_n$ 是 G_n 的闭包，$a\wedge b=\min(a,b)$。于是 f_n 在 G^c 上为 0，故 $f_n\in\mathscr{F}$，并且显然有

$$1_G\geqslant f_n\geqslant 1_{G_n}\uparrow 1_G. \qquad \text{得证。}$$

20. 引理 设 $z\in X$，$S_j(z)$ 是以 z 为中心，半径为 j 的开球，$j=1,2,\cdots$。又设 f_j 是 (X,ρ_X) 上的有界连续函数，满足（根据 Urysohn 引理）

$$1_{S_j(z)}(\cdot)\leqslant f_j(\cdot)\leqslant 1_{S_{j+1}(z)}(\cdot).$$

于是 $f_j\in\mathscr{F}$。现设 $(\mu_n)\subset M$，记

$$\mu_n^{(j)}(A)=\int_A f_j d\mu_n,\qquad A\in\mathscr{B}.$$

则 $\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}$ 某个 $\mu\in M$，当且仅当对一切 $j=1,2,\cdots$ 有 $\mu_n^{(j)}\overset{w}{\Longrightarrow}$ 某个 $\mu^{(j)}\in M_b$。这时必有

$$\mu^{(j)}(A)=\int_A f_j\,d\mu,\qquad A\in\mathscr{B}.$$

证明 *必要性* 设 $\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$，则对任意的有界连续函数 $f\in\mathscr{F}_b$ 有 $ff_j\in\mathscr{F}$，所以

$$\int f d\mu_n^{(j)}=\int ff_j\,d\mu_n\longrightarrow\int ff_j\,d\mu=\int f d\mu^{(j)},$$

即有 $\mu_n^{(j)}\overset{w}{\Longrightarrow}\mu^{(j)}$，$j=1,2,\cdots$。

充分性 假定对一切 $j=1,2,\cdots$ 都有

$$\mu_n^{(j)}\overset{w}{\Longrightarrow}\text{某个 }\mu^{(j)}.$$

设 $f\in\mathscr{F}$，若 f 的支承在 S_j 之内，则对任意的 $m\geqslant j$ 有

$$\mu^{(m)}f=\int_{S_j}f\,d\mu^{(m)}=\lim_n\int_{S_j}f d\mu_n^{(m)}$$

$$=\lim_n\int_{S_j}ff_m d\mu_n=\lim_n\int_{S_j}ff_j\,d\mu_n=\lim_n\int_{S_j}f d\mu_n^{(j)}=\mu^{(j)}f.$$

这里引进了记号 $\mu f = \int f\,d\mu$.

现设 G 是任意有界开集，于是存在 j 使 $G \subset S_j$. 由引理 19，存在 $G_n \uparrow G$ 以及 $g_n \in \mathscr{F}$ 使

$$1_G \geqslant g_n \geqslant 1_{G_n} \uparrow 1_G,$$

于是当 $m \geqslant j$ 时，由前面的推导得

$$\mu^{(m)}(G) \geqslant \mu^{(m)} g_n = \mu^{(j)} g_n \geqslant \mu^{(j)}(G_n) \uparrow \mu^{(j)}(G);$$

以及

$$\mu^{(j)}(G) \geqslant \mu^{(j)} g_n = \mu^{(m)} g_n \geqslant \mu^{(m)}(G_n) \uparrow \mu^{(m)}(G);$$

所以

$$\mu^{(m)}(G) = \mu^{(j)}(G), \quad m \geqslant j.$$

由此不难推出，对一切 $A \in \mathscr{B}$，$A \subset S_j$，都有

$$\mu^{(j)}(A) = \mu^{(j+1)}(A) = \cdots .$$

现对于任意的 $B \in \mathscr{B}$ 令

$$\mu(B) = \sup_j \mu^{(j)}(B \cap S_j) .$$

这样定义的 $\mu \in M$，上面实际上已经证明了

$$\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu .$$

上节中我们已用 $\mathscr{A}_\mu$ 表示 μ 的连续集. 现令

$$\mathscr{B}_\mu = \mathscr{B} \cap \mathscr{A}_\mu ,$$

并称 $\mathscr{B}_\mu$ 中的集为有界 μ 连续集。于是 $A \in \mathscr{A}$ 是有界 μ 连续集的充要条件是，$A \in \mathscr{B}$ 并且 $\mu(\partial A) = 0$。

21. 引理 $\mathscr{A}_\mu$ 是 $\mathscr{A}$ 的子环，$\mathscr{B}_\mu$ 是 $\mathscr{B}$ 的子环。

证明 设 $A, B \in \mathscr{B}_\mu$，则由

$$\partial(A \cup B) = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{((A \cup B)^c)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{(A^c \cap B^c)} \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{A^c}\,\overline{B^c}$$
$$\subset (\bar{A} \cap \overline{A^c}) \cup (\bar{B} \cap \overline{B^c}) = \partial A \cup \partial B,$$

推出 $\mu(\partial(A \cup B)) \leqslant \mu(\partial A) + \mu(\partial B) = 0$，即 $A \cup B \in \mathscr{B}_\mu$；又因为

$$\partial(A \setminus B) = \partial(A \cap B^c) = \partial((A \cap B^c)^c) = \partial(A^c \cup B) \subset \partial(A^c) \cup \partial(B)$$
$$= \partial(A) \cup \partial(B),$$

推出 $\mu(\partial(A \setminus B)) = 0$，即 $A \setminus B \in \mathscr{B}_\mu$。于是 $\mathscr{B}_\mu$ 是 $\mathscr{B}$ 的子环。同理可证 $\mathscr{A}_\mu$ 是 $\mathscr{A}$ 的子环。实际上 $\mathscr{A}_\mu$ 还是代数。

相应于定理16，我们证明下面的等价命题。

22. 定理 设 $(\mu_n) \subset M$，则下述命题等价

1) $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$；

2) $\mu_n(A) \longrightarrow \mu(A)$，$(n \to \infty)$ 凡 $A \in \mathscr{B}_\mu$；

3) $\limsup\limits_n \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$，凡有界闭集 F，以及

$$\liminf_n \mu_n(G) \geqslant \mu(G)，\text{凡有界开集} G.$$

证明 1)$\Longrightarrow$3)。设 F 是有界闭集，选取有界开集列 (G_m)，$G_m \downarrow F$；对每个 m，选取 $f_m \in \mathscr{F}$ 使

$$1_F \leqslant f_m \leqslant 1_{G_m}.$$

由于 $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$，当 m 固定时有

$$\limsup_n \mu_n(F) \leqslant \lim_n \int f_m d\mu_n = \int f_m d\mu \leqslant \mu(G_m),$$

所以 $$\limsup_n \mu_n(F) \leqslant \lim_m \mu(G_m) = \mu(F).$$

设 G 是有界开集，取闭集列 $F_m \uparrow G$（例如 F_m 可取为 $\left\{a: \rho_X(a, G^c) \geqslant \frac{1}{m}\right\}$）同样可证得

$$\liminf_n \mu_n(G) \geqslant \mu(G).$$

3)$\Longrightarrow$2)。设 $A \in \mathscr{B}_\mu$，以 $\bar{A}$，A° 分别记 A 的闭包和内部，则由 3）推知

$$\mu(A) = \mu(\bar{A}) \geqslant \limsup_n \mu_n(\bar{A}) \geqslant \limsup_n \mu_n(A) \geqslant \liminf_n \mu_n(A)$$

$$\geqslant \liminf_n \mu_n(A^\circ) \geqslant \mu(A^\circ) = \mu(A),$$

所以 $$\lim \mu_n(A) = \mu(A).$$

2)$\Longrightarrow$1)。设 $f \in \mathscr{F}$，记 f 的支承为 F，则 F 是有界闭集。设 $\varepsilon > 0$，令

$$F\varepsilon = \{a: \rho_X(a, F) \leqslant \varepsilon\},$$

这是有界集。由于 $\partial F_\varepsilon \subset \{a: \rho_X(a, F) = \varepsilon\}$，所以当 $\varepsilon' \neq \varepsilon''$ 时，$\partial F_{\varepsilon'}$ 与 $\partial F_{\varepsilon''}$ 不相交。这说明对固定的 $\varepsilon > 0$，开区间 $(0, \varepsilon)$ 中至多只有可数个 ε' 使 $\mu(\partial F_{\varepsilon'}) > 0$。于是存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使 $\mu(\partial F_{\varepsilon_0}) = 0$，即 F_{ε_0} 是有界 μ 连续集。固定这样一个 ε_0，并记 $B = F_{\varepsilon_0}$。

现设 A 是任意 μ 连续集，即 $A \in \mathscr{A}_\mu$，于是 $A \cap B$ 是有界 μ 连续集。由2)有

$$B\mu_n(A) = \mu_n(A \cap B) \longrightarrow \mu(A \cap B) = B\mu(A), \quad (n \to \infty),$$

由定理16，$B\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} B\mu$，特别有

$$\mu_n f = (B\mu_n) f \longrightarrow (B\mu) f = \mu f, \quad (n \to \infty),$$

所以 $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$。

相应于定理17，我们有

23．定理 在 M 上存在一个有界距离 ρ_M 使得 (M, ρ_M) 是完备可分距离空间。由 ρ_M 所产生的拓扑正好是局部弱收敛所决定的拓扑。

证明 任意固定 X 中一点，以这点为中心以 $j = 1, 2, \cdots$ 为半径作开球列 (S_j)，$j = 1, 2, \cdots$。又在 $\mathscr{F}$ 中取一串函数 (f_j) 满足

$$1_{S_j} \leqslant f_j \leqslant 1_{S_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \cdots,$$

根据Urysohn引理，这样的f_i一定存在。

以M_b^∞记M_b的可列无穷维乘积空间，其上的距离$\rho_{M_b}^\infty$取为：

$$\rho_{M_b}^\infty(\overline{\mu},\overline{\nu})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\rho_{M_b}(\mu_i,\nu_i)}{1+\rho_{M_b}(\mu_i,\nu_i)},$$

其中$\overline{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_i,\cdots)$，$\overline{\nu}=(\nu_1,\cdots,\nu_i,\cdots)$是$M_b^\infty$中的元素。由于$(M_b,\rho_{M_b})$是完备可分的，所以$(M_b^\infty,\rho_{M_b}^\infty)$也是完备可分的。

对$\mu\in M$及自然数j，令

$$\mu^{(j)}(\cdot)=\int_{(\cdot)}f_j d\mu,\quad (j=1,2,\cdots),$$

则$\mu^{(j)}\in M_b$。映射$J:\mu\frown(\mu^{(1)},\mu^{(2)},\cdots,\mu^{(j)},\cdots)$是$M$到$M_b^\infty$内的一一映射。事实上，若$\mu,\nu\in M$满足条件：$\mu^{(j)}=\nu^{(j)}$，$j=1,2,\cdots$，则必有$\mu=\nu$。这因为对任意取定的$A\in\mathscr{B}$，必有自然数$j_0$使$A\subset S_{j_0}$，由

$$\mu(A)=\int_{S_{j_0}}1_A d\mu=\int 1_A f_{j_0}d\mu=\int 1_A f_{j_0}d\mu=\int 1_A d\mu^{(j_0)}=\int 1_A d\nu^{(j_0)}=\nu(A),$$

可知在$\mathscr{B}$上$\mu=\nu$，从而在$\mathscr{A}$上$\mu=\nu$。

现对于任意的$\mu,\nu\in M$，令

$$\rho_M(\mu,\nu)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{\rho_{M_b}(\mu^{(j)},\nu^{(j)})}{1+\rho_{M_b}(\mu^{(j)},\nu^{(j)})},$$

易知ρ_M是M上的距离，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_M(\mu_n,\mu_0)=0$等价于$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{M_b}(\mu_n^{(j)},\mu_0^{(j)})=0$，对一切$j=1,2,\cdots$。由引理20，知道$M$中按距离$\rho_M$的收敛，就是局部弱收敛，而且映射$J$将$(M,\rho_M)$嵌入$(M_b^\infty,\rho_{M_b}^\infty)$中。仍由引理20，可知$(M,\rho_M)$还是$(M_b^\infty,\rho_{M_b}^\infty)$的闭子集，所以它还是完备可分的。

相应于定理18，我们有

24. 定理 距离空间(M,ρ_M)中的子集Y是相对紧的，当且仅当对任意的X的有界闭集B有

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B)<\infty,$$

并且对任意$\varepsilon>0$，存在紧集$K_{B,\varepsilon}\subset B$使

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B\setminus K_{B,\varepsilon})<\varepsilon.$$

证明 对$j=1,2,\cdots$，令S_j和f_j如定理23中所取。又令

$$Y^{(j)}=\{\mu^{(j)}:\mu\in Y,\ \mu^{(j)}(\cdot)=\int_{(\cdot)}f_j d\mu\},$$

则$Y^{(j)}\subset M_b$。由引理20及定理23，可知Y在(M,ρ_M)中相对紧，当且仅当对一切$j=1,2,$

…, $Y^{(j)}$在(M_b,ρ_{M_b})中相对紧.

必要性 设B是X中的有界闭集，则存在j_0使$B\subset S_{j_0}$。如果Y在(M,ρ_M)中相对紧，则$Y^{(j_0)}$在(M_b,ρ_{M_b})中相对紧。由定理18有

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j_0)}(X)<\infty,$$

且存在紧集K_ε使

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j_0)}(K_\varepsilon^C)<\varepsilon.$$

因为$B\subset S_{j_0}$，$\mu^{(j_0)}(B)=\mu(B)$，由上面第一个不等式得

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B)<\infty.$$

又记$K_{B,\varepsilon}=B\cap K_\varepsilon$，则$K_{B,\varepsilon}\subset B$而且是紧集。于是

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B\backslash K_{B,\varepsilon})\leqslant\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j_0)}(K_\varepsilon^C)<\varepsilon,$$

必要性得证。

充分性 设Y满足定理中的条件。对任意j，令$B=\overline{S}_{j+1}$，于是$\mu^{(j)}(X)\leqslant\mu(\overline{S}_{j+1})$，从而

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j)}(X)<\infty,$$

又取$K_\varepsilon=K_{B,\varepsilon}$则

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j)}(K_\varepsilon^C)=\sup_{\mu\in Y}\mu(\overline{S}_{j+1}\backslash K_{B,\varepsilon})<\varepsilon,$$

这说明对任意j，$Y^{(j)}$在(M_b,ρ_{M_b})中相对紧。 证毕

对于(M,ρ_M)中子集的相对紧性，也可以这样叙述：(M,ρ_M)的子集Y称为相对紧的，如果Y中的任一序列$(\mu_n)\subset Y$必可抽出子序列(μ_{n_k})使

$$\mu_{n_k}\overset{l}{\Longrightarrow}\text{某个}\mu\in M,\ (k\to\infty).$$

这时也称Y是局部弱相对紧的。

下面的定理指出了弱收敛与局部弱收敛的关系。

25. 定理 设$(\mu_n)\subset M_b$，$\mu\in M_b$，则$\mu_n\overset{w}{\Longrightarrow}\mu$当而且仅当$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$并且$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$。

证明 必要性显然，往证充分性。任给$\varepsilon>0$，由于$\mu(X)<\infty$，存在紧集K使$\mu(K^c)<\varepsilon$（见Billingsley(1968)第一章定理1.4）。类似定理22中2)⇒1)时F_{ε_0}的选取，可找到包含K的有界闭集K_0使$\mu(\partial K_0)=0$。于是由$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$推知

$$\lim_n\mu_n(K_0)=\mu(K_0).$$

再由$\lim\limits_n \mu_n(X)=\mu(X)$及$\mu(K_0^C)<\varepsilon$，可选取$n_0$，使当$n\geqslant n_0$时有

$$\mu_n(K_0^C)<3\varepsilon,\ n\geqslant n_0.$$

现设f是任意有界连续函数，无妨设$|f|\leqslant C$。令

$$K_0\mu_n(\cdot)=\mu_n(\cdot\cap K_0),\ K_0\mu(\cdot)=\mu(\cdot\cap K_0),$$

则易见

$$K_0\mu_n\overset{w}{\Longrightarrow}K_0\mu.$$

于是当$n\geqslant n_0$时，

$$\left|\int fd\mu_n-\int fd\mu\right|\leqslant\left|\int_{K_0}fd\mu_n-\int_{K_0}fd\mu\right|+\left|\int_{K_0^c}fd\mu_n-\int_{K_0^c}fd\mu\right|$$

$$\leqslant\left|\int fd(K_0\mu_n)-\int fd(K_0\mu)\right|+4C\varepsilon,$$

由$K_0\mu_n\overset{w}{\Longrightarrow}K_0\mu$及$\varepsilon$的任意性得：

$$\lim_n\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

26．引理 在距离空间(M,ρ_M)中，N是闭集。

证明 对任意$\mu\in M$，引理21中已证明$\mathscr{B}_\mu$是$\mathscr{B}$的子环。现证明$L_\sigma(\mathscr{B}_\mu)=\mathscr{B}$。

设A是任意有界闭集。令

$$A_t=\{a:\rho_X(a,A)\leqslant t\},\ (t>0).$$

则A_t是包含A的有界集，$\partial A_t\subset\{a:\rho_X(a,A)=t\}$。仍如定理22证明中2）⇒1)可知，存在$t_n\downarrow 0$使对每个$n$，$\mu(\partial A_{t_n})=0$，即每个$A_{t_n}\in\mathscr{B}_\mu$。但$A=\bigcap\limits_n A_{t_n}$，可见$L_\sigma(\mathscr{B}_\mu)$包含一切有界闭集，从而$L_\sigma(\mathscr{B}_\mu)=\mathscr{B}$。

现设$(\mu_n)\subset N$，$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu\in M$。我们要证$\mu\in N$。

令$\Gamma=\{B\in\mathscr{B}:\ \mu(B)$取非负整数值$\}$。由定理22的2），当$B\in\mathscr{B}_\mu$时，$\lim\limits_n\mu_n(B)=\mu(B)$，即$\mu(B)$取非负整数值，所以$\mathscr{B}_\mu\subset\Gamma$。容易验证$\Gamma$是局部单调类，于是由定理5知$\Gamma=L_\sigma(\mathscr{B}_\mu)=\mathscr{B}$，这说明$\mu\in N$。证毕。

这样一来，如果我们以ρ_N记ρ_M在N上的限制，则(N,ρ_N)是(M,ρ_M)的闭子空间因而是完备可分的。

27．引理 (M,ρ_M)中由开集产生的σ代数（Borel集类）与$\mathbf{M}$重合。

证明 由ρ_M的定义，(M,ρ_M)中的拓扑正好是使一切定义于M上的函数$\mu\frown\mu f$，$f\in\mathscr{F}$都为连续的最粗拓扑，这里μf表示$\int fd\mu$。因此若记(M,ρ_M)中由开集产生的σ代数为$\mathbf{M}'$，则对一切$f\in\mathscr{F}$，，映射$\mu\frown\mu f$是可测的。

对于(X,ρ_X)中的任意有界开集G，由引理19，存在$f_n\in\mathscr{F}$使$1_G\geqslant f_n$，$f_n\to 1_G$，$(n\to\infty)$，从而由于$\mu f_n\to\mu G$，$(n\to\infty)$，推出映射$\mu\frown\mu(G)$是$\mathbf{M}'$可测的．应用局部单

调类定理容易推出，对一切$A\in\mathscr{B}$，映射$\mu\frown\mu(A)$是$\mathbf{M}'$可测的，于是由定义8知道$\mathbf{M}\subset\mathbf{M}'$。但$\mathbf{M}'\subset\mathbf{M}$是显然的，引理得证。

§5. 淡收敛

28. 本书主要讨论和应用弱收敛与局部弱收敛的有关概念和结果，而(X, ρ_X)恒假定是可分完备距离空间。

然而，从点过程与随机测度的发展历史来看，淡收敛这一概念很早就引进来了，而且类似上节定理22—25的结果早已被人们所熟悉和广泛地应用。

在定义13中，对可分完备距离空间上的紧有限测度给出了淡收敛的定义，从那个定义可以看出淡收敛是比局部弱收敛更广泛的概念。然而讨论淡收敛的问题，欲获得有意义的结果，还得假定(X, ρ_X)是局部紧的。这一节中我们假定(X, ρ_X)是局部紧的可分完备距离空间。

这时相应于定理22的结果是

29. 定理 设$(\mu_n)\subset M_K$，$\mu\in M_K$，则下述命题等价：

1) $\mu_n \overset{v}{\Longrightarrow} \mu$；

2) $\mu_n(A)\to\mu(A)$，对一切具有紧闭包的μ连续集A；

3) $\lim\limits_n \sup \mu_n(F)\leqslant\mu(F)$，凡闭集$F\in\mathscr{B}_K$，

并且 $\lim\limits_n \inf \mu_n(G)\geqslant\mu(G)$，凡开集$G\in\mathscr{B}_K$。

（证明见Kallenberg (1976) A7.2）。

相应于定理23的结果是

30. 定理 在M_K上可引进有界距离ρ_{M_K}使(M_K, ρ_{M_K})是可分完备距离空间，并且M_K中按ρ_{M_K}的收敛就是淡收敛。

（见Kallenberg(1976)A7.7）。

相应于定理24的结果是

31. 定理 (M_K, ρ_{M_K})中的子集Y是相对紧的，当且仅当

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B)<\infty，凡B\in\mathscr{B}_K。$$

（见Kallenberg（1976）A 7.5）

这时也称Y是淡相对紧的。

相应于定理25的结果是

32. 定理 设$(\mu_n)\in M_b$，$\mu\in M_b$，则$\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow}\mu$当且仅当$\mu_n \overset{v}{\Longrightarrow}\mu$并且$\mu_n(X)\to\mu(X)$，$(n\to\infty)$。

（见Kallenberg（1976）A7.6）。

这个定理的条件与定理25好象是一样的，但并不能由此看出淡收敛与局部弱收敛是

一致的。例如设$X=\{1,2,3,\cdots\}$，$\rho_X(i,j)=1,(i\neq j)$。这时(X,ρ_X)是有界距离空间，$\mu_n\overset{w}{\Longrightarrow}\mu$与$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$是一致的。但若令$\mu_n=\delta_n$，$\mu=0$则$\mu_n\overset{v}{\Longrightarrow}\mu$ 成立，但$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$不成立，并注意这时$\mu_n(X)=1$，$\mu(X)=0$。

§6. Kakutani 定理

33. 研究某类随机过程特别是具有独立增量的随机过程的绝对连续和相互奇异性时，Kakutani 定理看来是一个很有用的工具。本节叙述这个定理的一个今后我们便于采用的形式，所述内容显然属于初等测度论，但在一般测度论书中较少涉及。

设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，以$B(\Omega,\mathscr{F})$表示$\mathscr{F}$上全体有限测度集。设$\mu,\lambda\in B(\Omega,\mathscr{F})$，另外取$\gamma\in B(\Omega,\mathscr{F})$使$\mu\ll\gamma$，$\lambda\ll\gamma$（例如可取$\gamma=\mu+\lambda$，这里$\ll$表示绝对连续）。令

$$K_\rho(\mu,\lambda)=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma}\frac{d\lambda}{d\gamma}}\,d\gamma,$$

其中$\frac{d\mu}{d\gamma}$，$\frac{d\lambda}{d\gamma}$分别表示μ，λ相对于γ的Radon-Nikodym导数。容易证明，$K_\rho(\mu,\lambda)$与γ的选取无关。称$K_\rho(\mu,\lambda)$为μ，λ的Kakutani内积。

此外令

$$K_d(\mu,\lambda)=\int_\Omega\left(\sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma}}-\sqrt{\frac{d\lambda}{d\gamma}}\right)^2d\gamma\Big)^{\frac{1}{2}},$$

并称为μ，λ的Kakutani 距离。

特别当$\mu\ll\lambda$，则在上面γ为λ，并记$\frac{d\mu}{d\lambda}=f$

则

$$K_\rho(\mu,\lambda)=\int_\Omega\sqrt{f}\,d\lambda,\quad K_d(\mu,\lambda)=\left(\int_\Omega(\sqrt{f}-1)^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由简单的计算得出

$$(K_d(\mu,\lambda))^2=\mu(\Omega)+\lambda(\Omega)-2K_\rho(\mu,\lambda),$$

特别，当μ，λ都是$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度时，有

$$(K_d(\mu,\lambda))^2=2(1-K_\rho(\mu,\lambda)).$$

34. 引理 如果μ，λ都是$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度，则

$$\|\mu-\lambda\|\geqslant 2(1-K_\rho(\mu,\lambda))=(K_d(\mu,\lambda))^2,$$

其中$\|\mu-\lambda\|$是广义测度$\mu-\lambda$的全变差。

证明 任取γ使$\mu\ll\gamma$，$\lambda\ll\gamma$并且μ，λ相对于γ的Radon-Nikodym 导数记为f，g，则

$$2(1-K_\rho(\mu,\lambda))=\int_\Omega(f+g-2\sqrt{fg})\gamma(dw)=\int_\Omega(\sqrt{f}-\sqrt{g})^2\gamma(dw)$$

$$\leqslant\int_\Omega(\sqrt{f}+\sqrt{g})|\sqrt{f}-\sqrt{g}|\gamma(dw)=\int_\Omega|f-g|\gamma(dw)=\|\mu-\lambda\|.$$

35. 引理 如果μ，λ都是$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度，则

$$\|\mu-\lambda\|\leqslant\sqrt{8(1-K_\rho(\mu,\lambda))}=2K_d(\mu,\lambda).$$

证明 首先，设x，y是实数，则

$$(\sin^2x-\sin^2y)^2=(\sin x-\sin y)^2(\sin x+\sin y)^2$$

$$=4\left(\sin\frac{x-y}{2}\right)^2\left(2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right)^2\left(\cos\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$\leqslant 2(1-\cos(x-y))(\sin(x+y))^2\leqslant 2(1-\cos(x-y))$$

$$=2(1-\cos x\cos y-\sin x\sin y),$$

因此如果$0\leqslant a\leqslant 1$，$0\leqslant b\leqslant 1$，令$\sqrt{a}=\sin x$，$\sqrt{b}=\sin y$，则

$$(a-b)^2\leqslant 2(1-\sqrt{ab}-\sqrt{(1-a)(1-b)}).$$

现设$\gamma\in B(\Omega,\mathscr{F})$并且$\mu\ll\gamma$，$\lambda\ll\gamma$，$f=\frac{d\mu}{d\gamma}$，$g=\frac{d\lambda}{d\gamma}$，且令

$$\Omega_0=\{\omega:\ f(\omega)\leqslant g(\omega)\},$$

由Schwarz不等式，有

$$1-K_\rho(\mu,\lambda)=1-\int_\Omega\sqrt{fg}\,\gamma(d\omega)=1-\int_{\Omega_0}\sqrt{fg}\,\gamma(d\omega)-\int_{\Omega\backslash\Omega_0}\sqrt{fg}\,\gamma(d\omega)$$

$$\geqslant 1-\sqrt{\int_{\Omega_0}f\gamma(d\omega)\int_{\Omega_0}g\gamma(d\omega)}-\sqrt{\int_{\Omega\backslash\Omega_0}f\gamma(d\omega)\int_{\Omega\backslash\Omega_0}g\gamma(d\omega)}$$

$$\geqslant 1-\sqrt{\mu(\Omega_0)\lambda(\Omega_0)}-\sqrt{\mu(\Omega\backslash\Omega_0)\lambda(\Omega\backslash\Omega_0)}.$$

应用上面的不等式，就得

$$2(1-K_\rho(\mu,\lambda))\geqslant(\mu(\Omega_0)-\lambda(\Omega_0))^2,$$

另一方面，由范数$\|\cdot\|$的定义，有

$$\|\mu-\lambda\|=(\mu-\lambda)^+(\Omega)+(\mu-\lambda)^-(\Omega)=\int_{\Omega_0}(g-f)\gamma(d\omega)+\int_{\Omega\backslash\Omega_0}(f-g)\gamma(d\omega)$$

$$=\lambda(\Omega_0)-\mu(\Omega_0)+\mu(\Omega\backslash\Omega_0)-\lambda(\Omega\backslash\Omega_0)=2(\lambda(\Omega_0)-\mu(\Omega_0)).$$

综合上面两个结果，就得

$$\|\mu-\lambda\|\leqslant 2\sqrt{2(1-K_\rho(\mu,\lambda))}=2K_d(\mu,\lambda),$$ 证毕。

由引理34，35得，如果μ，λ是概率测度，则

$$(K_d(\mu,\lambda))^2\leqslant\|\mu-\lambda\|\leqslant 2K_d(\mu,\lambda).$$

36．引理 设$\mu,\lambda\in B(\Omega,\mathscr{F})$，则$\mu\perp\lambda$（$\mu$与$\lambda$相互奇异）当且仅当$K_\rho(\mu,\lambda)=0$。

证明 设$K_\rho(\mu,\lambda)=0$，取$\gamma\in B(\Omega,\mathscr{F})$使$\mu\ll\gamma$，$\lambda\ll\gamma$，令$\Omega_0=\{\omega:\ \frac{d\mu}{d\gamma}=0\}$，则

$$\mu(\Omega_0)=\int_{\Omega_0}\frac{d\mu}{d\gamma}\ d\gamma=0,$$

由于$K_\rho(\mu,\lambda)=0$，所以在$\Omega\backslash\Omega_0$上$\frac{d\lambda}{d\gamma}=0(a.e.\gamma)$，故$\lambda(\Omega\backslash\Omega_0)=0$即$\mu\perp\lambda$。

反之，设$\mu\perp\lambda$，则存在Ω_0使$\mu(\Omega_0)=0$，$\lambda(\Omega\backslash\Omega_0)=0$，于是$\frac{d\mu}{d\gamma}\cdot\frac{d\lambda}{d\gamma}=0\quad(a.e.\gamma)$。

37．引理 设$\mu,\lambda\in B(\Omega,\mathscr{F})$，则$\mu\perp\lambda$当且仅当，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\Omega_\varepsilon\in\mathscr{F}$使$\mu(\Omega_\varepsilon)<\varepsilon$，$\lambda(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon)<\varepsilon$。

证明 必要性是显然的。往证充分性。假定已经选好了满足条件的$\Omega_{\frac{1}{2^n}}$, $n=1,2,\cdots$

令 $\Omega_0=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\Omega_{\frac{1}{2^n}}$，则显然有

$$\mu(\Omega_0)=\lim_m \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty}\Omega_{\frac{1}{2^n}}\right)\leqslant\lim_m \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}=0,$$

以及

$$\lambda(\Omega\backslash\Omega_0)=\lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(\Omega\backslash\Omega_{\frac{1}{2^n}})\right)=\lim_m \lambda\left(\bigcap_{n=m}^{\infty}(\Omega\backslash\Omega_{\frac{1}{2^n}})\right)$$

$$\leqslant\lim_m \lambda(\Omega\backslash\Omega_{\frac{1}{2^m}})=0,$$

于是$\mu\perp\lambda$。

38．引理 设$(\Omega_k,\mathscr{F}_k)$，$1\leqslant k\leqslant m$，是m个可测空间，它们的乘积空间为

$$(\Omega,\mathscr{F})=\left(\mathop{\times}_{k=1}^{m}\Omega_k,\ \mathop{\times}_{k=1}^{m}\mathscr{F}_k\right),$$

假定$\mu_k,\lambda_k\in B(\Omega_k,\mathscr{F}_k)$，并令

$$\mu=\mathop{\times}_{k=1}^{m}\mu_k,\quad \lambda=\mathop{\times}_{k=1}^{m}\lambda_k.$$

则有

$$K_\rho(\mu,\lambda)=\prod_{k=1}^{m}K_\rho(\mu_k,\lambda_k).$$

证明 令$\gamma_k=\mu_k+\lambda_k$，则$\mu_k\ll\gamma_k,\lambda_k\ll\gamma_k$，$1\leqslant k\leqslant m$。又记$\gamma=\mathop{\times}_{k=1}^{m}\gamma_k$。任取$A_k\in\mathscr{F}_k$，$1\leqslant k\leqslant m$，则

$$\mu(A_1\times\cdots\times A_m)=\prod_{k=1}^{m}\int_{A_k}\mu_k(d\omega_k)=\prod_{k=1}^{m}\int_{A_k}\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}\gamma_k(d\omega_k)$$

$$=\int_{A_1\times\cdots\times A_m}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}\right)\gamma(d\omega_1\times\cdots\times d\omega_m),$$

既然在$\mathop{\times}_{k=1}^{m}\mathscr{F}_k$中的所有可测矩形上有

$$\mu(\cdot)=\int_{(\cdot)}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}\right)\gamma(d\omega_1\times\cdots\times d\omega_k),$$

并且所有可测矩形作成一π系，所以应用λ系方法可知上式在$\mathop{\times}_{k=1}^{m}\mathscr{F}_k$上也成立。所以

$$\mu\ll\gamma\ \text{并且}\ \frac{d\mu}{d\gamma}=\prod_{k=1}^{m}\frac{d\mu_k}{d\gamma_k},\ (a.e.\gamma),$$

同样可知

$$\lambda \ll \gamma \text{ 并且 } \frac{d\lambda}{d\gamma} = \prod_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}, \quad (a.e.\gamma),$$

于是

$$K\rho(\mu,\lambda) = \int \sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma} \frac{d\lambda}{d\gamma}}\, d\gamma = \int \sqrt{\prod_{k=1}^{m} \frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \cdot \prod_{k=1}^{m} \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}}\, d\gamma$$

$$= \int \prod_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \cdot \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}} \left(\mathop{\times}_{k=1}^{m} \gamma_k \right)(d\omega_1 \times \cdots \times d\omega_m)$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \int \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \cdot \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}}\, \gamma_k(d\omega_k) = \prod_{k=1}^{m} K\rho(\mu_k,\lambda_k).$$

下面的定理是引进Kakutani内积后最重要的结果。这里的叙述不但改进了 Kakutani定理原来的结果，而且证明简化了。

39. 定理 (Kakutani) 设$(\Omega_k,\mathscr{T}_k)$，$k=1,2,\cdots$，是一列可测空间，μ_k，λ_k是$(\Omega_k,\mathscr{T}_k)$上的概率测度。记

$$(\Omega,\mathscr{T}) = \left(\mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \Omega_k, \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \mathscr{T}_k \right), \quad \mu = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \mu_k, \quad \lambda = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \lambda_k,$$

则有

1) $K\rho(\mu,\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\mu_k,\lambda_k)$;

2) $\mu \perp \lambda$当且仅当$\prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\mu_k,\lambda_k)=0$;

3) $\mu \ll \lambda$当且仅当$\prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\mu_k,\lambda_k)>0$，并且对一切$k$，$\mu_k \ll \lambda_k$.

证明 1) 记

$$(\Omega^{(n)}, \mathscr{T}^{(n)}) = \left(\mathop{\times}_{k=1}^{n} \Omega_k, \mathop{\times}_{k=1}^{n} \mathscr{T}_k \right),$$

$$\mu^{(n)} = \mathop{\times}_{k=1}^{n} \mu_k, \quad \lambda^{(n)} = \mathop{\times}_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

则当$n\to\infty$时，$K\rho(\mu^{(n)},\lambda^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n} K\rho(\mu_k,\lambda_k)$或者发散到0，或者收敛于某个正数。

首先假定$\lim_{n\to\infty} K\rho(\mu^{(n)},\lambda^{(n)}) = 0$。这时对任意的正数$\varepsilon$，存在自然数$n$使

$$K\rho(\mu^{(n)},\lambda^{(n)}) < \varepsilon.$$

取$\gamma^{(n)} \in B\left(\mathop{\times}_{k=1}^{n} \Omega_k, \mathop{\times}_{k=1}^{n} \mathscr{T}_k \right)$使$\mu^{(n)} \ll \gamma^{(n)}$，$\lambda^{(n)} \ll \gamma^{(n)}$，令

$$\Lambda^{(n)} = \left\{ \omega^{(n)} : \omega^{(n)} \in \mathop{\times}_{k=1}^{n} \Omega_k, \quad \frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}(\omega^{(n)}) \leqslant \frac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}(\omega^{(n)}) \right\},$$

则有

$$\mu^{(n)}(\Lambda^{(n)}) = \int_{\Lambda^{(n)}} \frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}} d\gamma^{(n)} \leqslant \int_{\Lambda^{(n)}} \sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}} \frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}}\, d\gamma^{(n)}$$

$$\leqslant K_\rho(\mu^{(n)}, \lambda^{(n)}) < \varepsilon,$$

而在$\Omega^{(n)} \backslash \Lambda^{(n)}$ 上，$\dfrac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}} \geqslant \dfrac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}$. 也有

$$\lambda^{(n)}(\Omega^{(n)} \backslash \Lambda^{(n)}) < \varepsilon.$$

现在考虑$(\Omega, \mathscr{T})$中的柱集

$$\Lambda_n = \{ \omega : \omega^{(n)} \in \Lambda^{(n)} \},$$

则有

$$\mu(\Lambda_n) < \varepsilon, \quad \lambda(\Lambda_n^c) < \varepsilon,$$

由引理37知$\mu \perp \lambda$，从而$K_\rho(\mu, \lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} K_\rho(\mu_k, \lambda_k) = 0$。

现在假定$\prod_{k=1}^{\infty} K_\rho(\mu_k, \lambda_k) > 0$。这时我们选定正数序列$e_k$，使$0 < e_k < 1$，并且

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - e_k} = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt{1 - e_k} > 0.$$

令

$$\gamma_k = \begin{cases} \lambda_k, & \text{当}\mu_k \ll \lambda_k; \\ e_k \mu_k + (1 - e_k)\lambda_k, & \text{其余}. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

于是γ_k 是$(\Omega_k, \mathscr{T}_k)$上的概率测度，而且$\lambda_k \ll \gamma_k$ ，又有

$$(1 - e_k)\frac{d\lambda_k}{d\gamma_k} \leqslant 1 \quad (a.e.\gamma_k), \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

于是得

$$K_\rho(\mu_k, \gamma_k) = \int \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}} d\gamma_k \geqslant \int \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}(1 - e_k)\frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}} d\gamma_k = \sqrt{1 - e_k}\, K_\rho(\mu_k, \lambda_k),$$

从而

$$\prod_{k=1}^{\infty} K_\rho(\mu_k, \gamma_k) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} K_\rho(\mu_k, \gamma_k) \geqslant \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt{1 - e_k}\, K_\rho(\mu_k, \lambda_k) > 0.$$

现记

$$\gamma^{(n)} = \mathop{\times}_{k=1}^{n} \gamma_k, \quad \gamma = \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} \gamma_k,$$

并令

$$\phi_n = \sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}} = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}},$$

则ϕ_n可看作$(\Omega,\mathscr{F})$上的函数，而且

$$\int_{\Omega^{(n)}}\phi_n^2 d\gamma^{(n)}=\int_\Omega \phi_n^2 d\gamma=1;$$

而当$m>n$时有

$$\int_\Omega(\phi_m-\phi_n)^2 d\gamma=2\left(1-\int_\Omega\phi_m\phi_n d\gamma\right).$$

容易算得

$$\int_\Omega\phi_m\phi_n d\gamma=\int_\Omega\sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}\cdot\frac{d\mu^{(m)}}{d\gamma^{(m)}}}\,d\gamma^{(m)}=\prod_{k=n+1}^{m}K_\rho(\mu_k,\gamma_k).$$

由于$\prod_{k=1}^{\infty}K_\rho(\mu_k,\gamma_k)$收敛，故

$$\lim_{m>n\to\infty}\prod_{k=n+1}^{m}K_\rho(\mu_k,\gamma_k)=1.$$

这说明(ϕ_n)在$(\Omega,\mathscr{F},\gamma)$中均方收敛，令其极限为$\phi$。现对任意的$\Lambda^{(n)}\in\mathscr{F}^{(n)}$，当$m>n$时记

$$\Lambda^{(m)}=\{\omega^{(m)}:\ \omega^{(n)}\in\Lambda^{(n)}\},$$
$$\Lambda=\{\omega:\ \omega\in\Omega,\omega^{(n)}\in\Lambda^{(n)}\},$$

则

$$\mu(\Lambda)=\lim_{m>n\to\infty}\mu^{(m)}(\Lambda^{(m)})=\int_\Lambda\phi^2 d\gamma.$$

上式对一切$\mathscr{F}$中的柱集成立，自然对一切$\Lambda\in\mathscr{F}$成立，故$\mu\ll\gamma$并且$\frac{d\mu}{d\gamma}=\phi^2$.

下面再考虑$K_\rho(\lambda_k,\gamma_k)$，由于

$$K_\rho(\lambda_k,\gamma_k)=\int\sqrt{\frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}}d\gamma_k\geqslant\int\sqrt{\frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}(1-e_k)\frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}}d\gamma_k=\sqrt{1-e_k},$$

并且由于$\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-e_k}$收敛，知$\prod_{k=1}^{\infty}K_\rho(\lambda_k,\gamma_k)>0$，令

$$\varphi_n=\sqrt{\frac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}},$$

重复上面的证法，知(φ_n)是$(\Omega,\mathscr{F},\gamma)$中的均方收敛序列，设其极限为$\varphi$，则$\lambda\ll\gamma$，$\frac{d\lambda}{d\gamma}=\varphi^2$.

于是我们得到

$$K_\rho(\mu,\lambda)=\int\phi\varphi d\gamma=\lim_n\int\phi_n\varphi_n d\gamma=\lim_n\int\sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}\cdot\frac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}}\,d\gamma^{(n)}$$

$$=\lim_n K_\rho(\mu^{(n)},\lambda^{(n)})=\lim_n\prod_{k=1}^{n}K_\rho(\mu_k,\lambda_k),$$

从而证明了1)；

2） 由引理36，$\mu\perp\lambda$当且仅当$K_\rho(\mu,\lambda)=0$，由1)即得证2)；

3） 当$\prod\limits_{k=1}^{\infty}K_\rho(\mu_k,\lambda_k)>0$并且对一切$k$，$\mu_k\ll\lambda_k$时，在上面1)的证明中取$\nu_k=\lambda_k$，$k=1,2,\cdots$，则$\gamma=\lambda$故$\mu\ll\lambda$；反之，如果$\mu\ll\lambda$，由2)知$\prod\limits_{k=1}^{\infty}K_\rho(\mu_k,\lambda_k)>0$，而且若考虑柱集

$$\Lambda\times\prod_{i\neq k}\Omega_i,\quad \Lambda\in\mathscr{T}_k,\quad (k=1,2,\cdots),$$

则易推出$\mu_k\ll\lambda_k$，$k=1,2,\cdots$。定理证毕。

§7. Kolmogorov定理

40. 定义 （Kolmogorov相容族） 设Λ是任意指标集，$\{(\Omega_t,\mathscr{T}_t);\ t\in\Lambda\}$是一族可测空间。设$T\subset\Lambda$，按通常的办法定义乘积空间

$$(\mathop{\times}_{t\in T}\Omega_t,\ \mathop{\times}_{t\in T}\mathscr{T}_t),$$

当$T_1\subset T_2\subset\Lambda$时，$(\mathop{\times}_{t\in T_1}\Omega_t,\ \mathop{\times}_{t\in T_1}\mathscr{T}_t)$看作是空间$(\mathop{\times}_{t\in T_2}\Omega_t,\ \mathop{\times}_{t\in T_2}\mathscr{T}_t)$的投影。

如果对于任意Λ的有限子集T，在$(\mathop{\times}_{t\in T}\Omega_t,\ \mathop{\times}_{t\in T}\mathscr{T}_t)$上给定了概率测度$P_T$，而且满足条件：

若$T_1\subset T_2$都是Λ的有限子集，则P_{T_2}在$(\mathop{\times}_{t\in T_1}\Omega_t,\ \mathop{\times}_{t\in T_1}\mathscr{T}_t)$上的限制就是$P_{T_1}$；则称概率分布族

$$\{P_T;\ T\subset\Lambda,\ T\text{是有限集}\}$$

是Kolmogorov相容族。

41. 定理(Kolmogorov) 设Λ是任意指标集，$\{X_t;\ t\in\Lambda\}$是一族可分完备距离空间，以$\mathscr{A}(X_t)$记X_t的Borel集类。若对任意Λ的有限子集T，在$(\mathop{\times}_{t\in T}X_t,\ \mathop{\times}_{t\in T}\mathscr{A}(X_t))$上给定了概率测度$P_T$，而且$\{P_T;\ T\subset\Lambda,\ T\text{有限}\}$是Kolmogorov相容族，则在空间$(\mathop{\times}_{t\in\Lambda}X_t,\ \mathop{\times}_{t\in\Lambda}\mathscr{A}(X_t))$上存在唯一的概率测度$P$，$P$在$(\mathop{\times}_{t\in T}X_t,\ \mathop{\times}_{t\in T}\mathscr{A}(X_t))$，$(T\subset\Lambda\text{有限})$上的限制就是给定的$P_T$。

本定理参看J.Neveu(1965)Ⅲ.3的定理及命题Ⅰ.7.3。

第二章 点过程基础

这一章详细叙述点过程理论的一些基本概念和方法。存在定理是研究点过程的基础，这里给出了详细的证明。简单性，有序性和无后效性是最早引入点过程的重要概念，本章力求对有关结果给出完整的叙述。Laplace泛函是研究点过程的基本工具，收敛性是点过程理论的基本内容，卷积以及$\mathscr{U}_B$型分布对于研究无穷可分点过程是必不可少的工具，最后还讨论了点过程的稀疏。

§1. 记号和定义

1. 记号 先回忆第一章中引入的记号。我们恒以(X,ρ_X)表示任意的可分完备距离空间，在没有特别说明时，也就不再附加别的条件。以$\mathscr{A}$记X的Borel集类，$\mathscr{B}$记全体有界的Borel集。

以M记$(X,\mathscr{A})$上全体局部有限测度，(M,ρ_M)是由定理Ⅰ.23所确定的可分完备有界距离空间；以$\mathbf{M}$记(M,ρ_M)上的Borel集类，由定理Ⅰ.23可知它就是定义Ⅰ.8所引进的σ代数。可测空间$(M,\mathbf{M})$称为局部有限测度空间。

我们还以M_b记$(X,\mathscr{A})$上全体有限测度。在定理Ⅰ.17中定义了可分完备距离空间(M_b,ρ_{M_b})。

以N记$(X,\mathscr{A})$上全体计数测度，由引理Ⅰ.26，N是(M,ρ_M)中的闭子集，于是$N\in\mathbf{M}$。将ρ_M限制在N上记为ρ_N，则(N,ρ_N)也是可分完备有界距离空间。令$\mathbf{N}=N\cap\mathbf{M}$，称$(N,\mathbf{N})$为计数测度空间。

我们恒以$\mathscr{F}_b$记(X,ρ_X)上的有界连续函数全体，而以$\mathscr{F}$记其中具有有界支承的全体有界连续函数。

一般地我们使用$A,B,C,\cdots$表示X的子集，特别是$\mathscr{A}$可测的子集；而常以$\mu,\nu,\lambda,\gamma,\cdots$表示局部有限测度或计数测度。对于$M$或$N$的子集常以$U,V,W,Y,Z\cdots$表示，特别常用来表示$\mathbf{M}$或$\mathbf{N}$中的元素。

对于任意的$\mu\in M$，$A\in\mathscr{A}$，以$_A\mu$记μ在A上的限制（见Ⅰ.11）而以$_A\mathbf{M}$及$_A\mathbf{N}$分别表M及N上由这些限制产生的σ代数。

在测度论中$\sigma(\Gamma)$常表示由集类Γ产生的最小σ代数；$m(\Gamma)$常表示由Γ所产生的最小单调类。我们以$L_\sigma(\Gamma)$表示由$\Gamma\subset\mathscr{B}$所产生的最小局部σ环，而以$L_m(\Gamma)$表示由$\Gamma\subset\mathscr{B}$所产生的最小局部单调类。这些记号今后将常用。

2. 定义 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是任意概率空间，由$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(M,\mathbf{M})$的任意可测映像ξ，称为随机测度；由$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(N,\mathbf{N})$的任意可测映像ξ，称为随机点过程（简称为点过程）。

特别，在$(M,\mathbf{M})$上任意给定一概率测度P，由$(M,\mathbf{M},P)$到$(M,\mathbf{M})$的恒等映像就是

一随机测度；而在$(N,\mathbf{N})$上任意给定一个概率测度P，由$(N,\mathbf{N},P)$到$(N,\mathbf{N})$的恒等映像就是一点过程。

$(M,\mathbf{M})$上的一切概率测度记为$\mathscr{P}_M$；$(N,\mathbf{N})$上的一切概率测度记为$\mathscr{P}_N$，当$P\in\mathscr{P}_N$时，也称P为点分布。

对于给定的随机测度(或点过程)ξ，可以认为它是$\Omega\times\mathscr{A}$上的二元函数，$\xi=\xi(\omega,A)$，$\omega\in\Omega$，$A\in\mathscr{A}$。于是当$A\in\mathscr{B}$固定时，作为ω的函数，$\xi(\omega,A)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量，以$\xi(A)$记之；而当$\omega\in\Omega$固定时，作为定义在$\mathscr{A}$上的集函数，$\xi(\omega,A)$是$\mathscr{A}$上的局部有限测度，以$\xi(\omega)$记之，$\xi(\omega)\in M$。对于任意$\mathscr{A}$可测的非负函数，积分$\int f(a)\xi(\omega,da)$对于一切$\omega\in\Omega$有意义，而且作为ω的函数是$\mathscr{F}$可测的，记之为ξf。特别当$f=1_A$，$A\in\mathscr{B}$时，ξf就是上面引入的$\xi(A)$。称$P\xi^{-1}(\cdot)=P(\xi\in\cdot)$为$\xi$的分布。

基本概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$将永远假定是固定的，今后不再标出。这里的字母P，既是$\mathscr{F}$上的概率测度，有时也用以表示$(M,\mathbf{M})$(或$(N,\mathbf{N})$)上的概率测度，但注明$P\in\mathscr{P}_M$(或$P\in\mathscr{P}_N$)。

3. 设$k\geqslant1$，$A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{B}$。由$\sigma$代数$\mathbf{M}$(或$\mathbf{N}$)的构造可知，映射

$$\pi_{A_1,\cdots,A_k}:\ \mu\frown(\mu(A_1),\cdots,\mu(A_k))$$

是由M(或N)到R_+^k(或Z_+^k)中的可测映射，这里R_+表示$[0,\infty)$，Z_+表示$(0,1,2,\cdots)$。

设$P\in\mathscr{P}_M$(或$\mathscr{P}_N$)，以$P_{A_1,\cdots,A_k}$表示在映射$\pi_{A_1,\cdots,A_k}$之下，P在R_+^k(或Z_+^k)上的导出测度。当k取遍所有自然数，而$A_1,\cdots,A_k$在$\mathscr{B}$中变动时，由此得到的概率分布族

$$\{P_{A_1,\cdots,A_k}:\ k=1,2,\cdots,A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{B}\}$$

称为P的有限维分布族。

当$P\in\mathscr{P}_M$(或$\mathscr{P}_N$)是某个随机测度(或点过程)ξ的分布时，$P_{A_1,\cdots,A_k}$就是随机向量$(\xi(A_1),\cdots,\xi(A_k))$的概率分布。

M中由变换$\pi_{A_1,\cdots,A_k}$所产生的σ代数记为$\mathbf{M}_{A_1,\cdots,A_k}$；$N$中由变换$\pi_{A_1,\cdots,A_k}$所产生的$\sigma$代数记为$\mathbf{N}_{A_1,\cdots,A_k}$。

4. 引理 设$\Gamma\subset\mathscr{B}$是半环，并且$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$。记

$$\widetilde{\mathbf{M}}=\bigcup_{A_1,\cdots,A_m}\mathbf{M}_{A_1,\cdots,A_m},\quad \widetilde{\mathbf{N}}=\bigcup_{A_1,\cdots,A_m}\mathbf{N}_{A_1,\cdots,A_m}$$

这里$A_1,\cdots,A_m$跑遍Γ中一切互不相交的有限集族，则$\widetilde{\mathbf{M}}$和$\widetilde{\mathbf{N}}$是代数，并且$\sigma(\widetilde{\mathbf{M}})=\mathbf{M}$，$\sigma(\widetilde{\mathbf{N}})=\mathbf{N}$。

证明 先证明$\widetilde{\mathbf{M}}$是代数，为此只要证明：对于Γ中任意不相交的$A_1,\cdots,A_k$以及任意不相交的$B_1,\cdots,B_s$，存在Γ中不相交的$A_1',\cdots,A_m'$使

$$\mathbf{M}_{A_1,\cdots,A_k}\cup\mathbf{M}_{B_1,\cdots,B_s}\subset\mathbf{M}_{A_1',\cdots,A_m'}.\tag{1}$$

由于Γ所产生的环就是Γ中元素的全体有限不交并，所以不失一般性，可以假定Γ本身是环。这时$A_1',\cdots,A_m'$可取为如下的

$$A_i\cap B_j,\ A_i\backslash B,\ B_j\backslash A,\qquad i=1,2,\cdots,k,j=1,2,\cdots,s,$$

这里$A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$，$B=\bigcup_{j=1}^{s}B_j$。显然如此取定的$A_1',\cdots,A_m'$属于环Γ，并且每一$A_i,B_j(1\leqslant i\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant s)$都可用$A_1',\cdots,A_m'$中的成员表为不交并，所以(1)式成立。

现设$\Gamma_1\subset\mathscr{B}$满足条件：$A\in\Gamma_1$当且仅当映射$\mu\frown\mu(A)$是$\sigma(\widetilde{\mathbf{M}})$可测的。显然$\Gamma_1$包含环$\Gamma$，并且容易验明$\Gamma_1$是局部单调类，于是$\Gamma_1=\mathscr{B}$。由于$\mathbf{M}$是使所有映射$\mu\frown\mu(A)$，$A\in\mathscr{B}$都为可测的最小$\sigma$代数，故$\sigma(\widetilde{\mathbf{M}})\supset\mathbf{M}$；但反向的包含关系是明显的。对于$\widetilde{\mathbf{N}}$的结论可类似得出。

上述引理直接给出如下的推论：

5. 推论 设$P,Q\in\mathscr{P}_{\mathbf{M}}$(或$\mathscr{P}_{\mathbf{N}}$)，又设$\Gamma\subset\mathscr{B}$是半环并且$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$。如果对于任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$有

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=Q_{A_1,\cdots,A_m},$$

则$P=Q$。

6. 记号的补充说明 本书将涉及很多具体的空间，我们作如下的约定。

一般地总假定(X,ρ_X)是一个**未经具体指出**的抽象空间，对于它，前面引入的一切记号照旧。而对于某个具体指明的空间，对于前面引入的记号，我们以空间本身具体标明。例如，设R^m是m维欧氏空间，我们以

$\mathscr{A}(R^m)$表示R^m中全体Borel集；

$\mathscr{B}(R^m)$表示R^m中全体有界Borel集；

$\mathscr{F}_b(R^m)$表示R^m上的全体有界连续函数；

$\mathscr{F}(R^m)$表示R^m上的全体有有界支承的有界连续函数；

$M(R^m)$表示R^m上全体局部有限测度；

$N(R^m)$表示R^m上全体计数测度；

$\mathbf{M}(R^m)$，$\mathbf{N}(R^m)$，$(M(R^m),\ \rho_{M(R^m)})$，$(N(R^m),\ \rho_{N(R^m)})$，…所表示的意思也是清楚的。

又例如$Z_+=(0,1,2,\cdots)$，规定$\rho_{Z_+}(i,j)=|i-j|$，则(Z_+,ρ_{Z_+})是可分完备距离空间，于是记号$\mathscr{A}(Z_+)$，$\mathscr{B}(Z_+)$，$\mathscr{F}_b(Z_+)$，$\mathscr{F}(Z_+)$等等，表示的意思也是清楚的。

§2. 存在定理(一)：一维情形

7. 连续两节我们将证明点过程理论的一个基本结果：存在定理。它相当于一般随机过程理论中的Kolmogorov定理。本节证明一个简单情形，方法是初等的。

设(R,ρ_R)是带通常距离的实直线。假定P是$\mathbf{N}(R)$上的分布，即$P\in\mathscr{P}_{N(R)}$，则对任意的$m\geqslant 1$，$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}(R)$，$P$的有限维分布族$P_{A_1,\cdots,A_m}$就确定了，而且有限

维分布族唯一确定了分布 P。

我们所要讨论的存在问题，可按下面的方式叙述：给定了概率分布族

$$\{P^{A_1,\cdots,A_m}: m=1,2,\cdots,\ A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}(R)\}$$

其中每一 $P^{A_1,\cdots,A_m}$ 是 Z_+^m 上的分布，并且满足 Kolmogorov 相容性条件：

1) 对任意的 $m\geqslant 1$ 及非负整数 $l_1,\cdots,l_m$，等式

$$P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=P^{A_{i_1},\cdots,A_{i_m}}(l_{i_1},\cdots,l_{i_m})$$

对 $(1,2,\cdots,m)$ 的任意排列 $(i_1,\cdots,i_m)$成立。

2) $$\sum_{l_m\in Z_+} P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_{m-1},l_m)=P^{A_1,\cdots,A_{m-1}}(l_1,\cdots,l_{m-1}).$$

根据 Kolmogorov 定理，存在 $Z_+^{\mathscr{B}(R)}$（即定义于$\mathscr{B}(R)$ 而取值于 Z_+ 的全体集函数）上的概率分布 P，使得 P 的有限维分布就是给定的概率分布族，即

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=P^{A_1,\cdots,A_m},\quad m\geqslant 1, A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}(R).$$

由于对于每个 $\mu\in N(R)$，$\mu(A)\in Z_+$，$(A\in\mathscr{B}(R))$，所以$N(R)\subset Z_+^{\mathscr{B}(R)}$，但并非每一个 $Z_+^{\mathscr{B}(R)}$ 中的元都是$\mathscr{B}(R)$ 上的计数测度。于是要问，需要对上面给出的满足 Kolmogorov 相容条件的概率分布族$\{P^{A_1,\cdots,A_m}\}$附加什么条件，才能使得由它决定的 P 正好是一个点分布，即满足 $P(N(R))=1$?

本节的目的就在于讨论这个问题。下一节我们还将在一般的可分完备距离空间讨论相同的问题。

首先，假设 P 是点分布，即 $P\in\mathscr{P}_{N(R)}$，则它的有限维分布显然应满足条件：

3) 对任意的 $A,B\in\mathscr{B}(R)$，$A\cap B=\phi$，有

$$P_{A,B,A\cup B}((n_1,n_2,n_3)\in Z_+^3: n_1+n_2=n_3)=1;$$

4) 对于任意的 $(A_n)\subset\mathscr{B}(R)$，$A_n\downarrow\phi$，有

$$\lim_{n\to\infty}P_{A_n}(0)=1.$$

因此，为使给定的 Kolmogorov 相容族 $\{P^{A_1,\cdots,A_m}\}$是某个点分布的有限维分布，条件3)，4)是必要的。事实上这也是充分条件。

8. 存在定理（一维情形）。设 Γ 是 R 中由全体具有有理端点的左开右闭区间所产生的环。又设对任意 $m\geqslant 1$，任意的 $A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，存在 Z_+^m 上的概率分布 $P^{A_1,\cdots,A_m}$。为使如此给出的概率分布族

$$\{P^{A_1,\cdots,A_m}: m\geqslant 1,\ A_1,\cdots,A_m\in\Gamma\}$$

是某个点分布的有限维分布，即存在 $P\in\mathscr{P}_{N(R)}$ 使

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=P^{A_1,\cdots,A_m},\quad m\geqslant 1,\ A_1,\cdots,A_m\in\Gamma,$$

充分必要条件是：

1） 对任意的 $m\geqslant 1$ 及任意的 $l_1,\cdots,l_m\in Z_+$，等式

$$P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=P^{A_{i_1},\cdots,A_{i_m}}(l_{i_1},\cdots,l_{i_m})$$

对 $(1,2,\cdots,m)$ 的任意排列 $(i_1,\cdots,i_m)$ 都成立；

2） 对任意非负整数 $l_1,\cdots,l_{m-1}$，有

$$\sum_{l_m\in Z_+} P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots l_{m-1},l_m)=P^{A_1,\cdots,A_{m-1}}(l_1,\cdots,l_{m-1});$$

3） 对任意的 $A,B\in\Gamma$，$A\cap B=\phi$，有

$$P^{A,B,A\cup B}\Big((n_1,n_2,n_3)\in Z_+^3: n_1+n_2=n_3\Big)=1;$$

4） 若 $(A_n)\subset\Gamma$，$A_n\downarrow\phi$，则

$$\lim_{n\to\infty}P^{A_n}(0)=1.$$

证明 必要性是明显的（见上面的讨论）。往证充分性。由条件1）和2），应用Kolmogorov定理，存在 $(Z_+^\Gamma,(\mathscr{A}(Z_+))^\Gamma)$ 上的概率分布 P_0，满足

$P_0(x\in Z_+^\Gamma: x(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)=P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)$，其中 m 是任意自然数，$l_1,\cdots l_m$ 是任意非负整数，而 $A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$。这里 σ 代数 $(\mathscr{A}(Z_+))^\Gamma$ 是按通常的方法由投影产生的，即由如下形式的集合族

$$(x\in Z_+^\Gamma: x(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m),\ m\geqslant 1,\ l_i\in Z_+,\ A_i\in\Gamma,\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

所产生的。

设 $N^\Gamma(R)\subset Z_+^\Gamma$ 满足以下条件：$x\in N^\Gamma(R)$ 当且仅当 $x\in Z_+^\Gamma$ 并且对 Γ 中任意不相交的 A 和 B 有

$$x(A\cup B)=x(A)+x(B).$$

由于 Γ 是可数的，故由条件3）知

$$P_0(Z_+^\Gamma\setminus N^\Gamma(R))=P_0\,(x\in Z_+^\Gamma:\text{存在不相交的 }A,\ B\in\Gamma,\text{ 使}$$

$$x(A\cup B)\neq x(A)+x(B))\leqslant\sum_{\substack{A,B\in\Gamma\\ A\cap B=\phi}}P_0(x\in Z_+^\Gamma: x(A\cap B)\neq x(A)+x(B))$$

$$=\sum_{\substack{A,B\in\Gamma\\ A\cap B=\phi}}P^{A,B,A\cup B}((n_1,n_2,n_3)\in Z_+^3: n_1+n_2\neq n_3)=0,$$

这说明 $P_0(N^\Gamma(R))=1$。

容易明白，$x\in N^\Gamma(R)$ 表示 $x(\cdot)$ 是环 Γ 上的有限可加计数测度。

设 $N_0(R)\subset N^\Gamma(R)$ 满足条件：$x\in N_0(R)$ 当且仅当 $x\in N^\Gamma(R)$ 并且对任意 $(A_n)\subset\Gamma$，$A_n\downarrow\phi$ 有 $x(A_n)\downarrow 0$。我们要证明 $P(N^\Gamma(R)\setminus N_0(R))=0$。

假设 $x\in N^\Gamma(R)$，但 $x\notin N_0(R)$，则存在 $(A_n)\subset\Gamma$，$A_n\downarrow\phi$，并且 $x(A_n)\geqslant 1$ 对一切 n 成立。这里的 (A_n) 可以取为具有有理端点的左开右闭区间 (I_n)。事实上，由于 $A_i\in\Gamma$，A_i 可

表为有限个互不相交的具有有理端点的左开右闭区间之并，$A_1=\bigcup_{i=1}^{m_1}A_{1i}$。又由于对所有的 $n\geqslant 1$ 都有 $A_1\supset A_n$，$x(A_n)\geqslant 1$，所以必存在 i_0，$1\leqslant i_0\leqslant m_1$ 使 $x(A_{1i_0}\cap A_n)\geqslant 1$ 对一切 n 成立。取 $I_1=A_{1i_0}$，则 $I_1\subset A_1$，并且 $x(I_1\cap A_n)\geqslant 1$ 对一切 n 成立。类似地考虑序列 $(I_1\cap A_n)$，将 $I_1\cap A_2$ 表为互不相交的具有有理端点的左开右闭区间之有限并，可知存在具有有理端点的左开右闭区间 I_2，满足 $I_2\subset I_1\cap A_2$，并且 $x(I_2\cap I_1\cap A_n)\geqslant 1$ 对一切 $n\geqslant 2$ 成立。一般地，设对 $k\geqslant 2$ 已选好 k 个具有有理端点的左开右闭区间 $I_1, I_2, \cdots, I_k$，满足

$$I_{i+1}\subset I_i\cap A_{i+1},\ (i=1,2,\cdots,k-1)\ 并且\ x(I_k\cap I_{k-1}\cap\cdots\cap I_1\cap A_n)\geqslant 1$$

对一切 $n\geqslant k$ 成立；考虑序列 $(I_k\cap\cdots\cap I_1\cap A_{k+m})$，$m=1,2,\cdots$，并将 $I_k\cap\cdots\cap I_1\cap A_{k+1}$ 表示为互不相交的具有有理端点的左开右闭之有限并，类似地可知存在具有有理端点的左开右闭区间 $I_{k+1}\subset I_k\cap\cdots\cap I_1\cap A_{k+1}$，并且 $x(I_{k+1}\cap I_k\cap\cdots\cap I_1\cap A_n)\geqslant 1$ 对一切 $n\geqslant k+1$ 成立。于是由归纳法原理，可选出一串具有有理端点的左开右闭区间 (I_n)，满足：

$$I_n\downarrow\phi,\ 并且对所有\ n\ 有\ x(I_n)\geqslant 1;$$

现设 $I_n=(r_n, s_n]$，$n=1,2,\cdots$，r_n，s_n 都是有理数。这时必存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时 $r_n=r_{n_0}$。否则将存在严格上升的子序列 $\{r_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}r_{n_k}=r_0\in I_n$ 对一切 n 成立，这与 $I_n\downarrow\phi$ 矛盾。

所以我们无妨设 $I_n=(r_0, s_n]$，r_0，s_n 是有理数并且 $s_n\downarrow r_0$ 而 $x((r_0, s_n])\geqslant 1$，$n=1,2,\cdots$。对有理数 r 及正整数 m，令

$$B_{r,m}=\{x;x\in N^r(R),\ x((r,r+\frac{1}{m}])\geqslant 1\}，则$$

$$P_0(B_{r,m})=1-P_0\{x;x\in N^r(R),x((r,r+\frac{1}{m}])=0\}=1-P^{(r,r+\frac{1}{m}]}(0),$$

由条件4），当 $m\uparrow\infty$ 时，$P_0(B_{r,m})\downarrow 0$。令 $B_r=\bigcap\limits_m B_{r,m}$，则 $P_0(B_r)=0$。

另一方面，前面的证明表明，如果 $x\in N^r(R)$ 但 $x\notin N_0(R)$，则 $x\in$ 某个 B_{r0}。因此

$$P_0(N^r(R)/N_0(R))\leqslant\sum_r P_0(B_r)=0,$$

这表明 $P_0(N_0(R))=1$。

因为每一 $x\in N_0(R)$ 是环 Γ 上的计数测度，并且在环 Γ 上 σ 有限；又因为 $\sigma(\Gamma)=\mathscr{A}(R)$，故 x 可扩张为 $\mathscr{A}(R)$ 上的计数测度 μ。由于这扩张的唯一性，可知对应 $x\frown\mu$ 是 $N_0(R)$ 到 $N(R)$ 到 $N(R)$ 上的一一对应；又由 σ 代数 $N_0(R)\cap(\mathscr{A}(Z_+))^r$ 及 $\mathbf{N}(R)$ 的构造可知这对应还是可测的，因此如果以 P 记 P_0 由变换 $x\frown\mu$ 在 $\mathbf{N}(R)$ 上的导出测度，则 P 是 $\mathbf{N}(R)$ 上的概率分布，并且对任意 $m\geqslant 1$，任意非负整数 $l_1,\cdots,l_m$，以及任意的 $A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，有

$$\begin{aligned}&P\{\mu;\ \mu\in N(R),\ \mu(A_1)=l_1,\ \cdots,\ \mu(A_m)=l_m\}\\&=P_0\{x;\ x\in N_0(R),\ x(A_1)=l_1,\ \cdots,\ x(A_m)=l_m\}\\&=P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\ \cdots,\ l_m),\end{aligned}$$

于是P就是所求的点分布。根据推论5，这样的点分布P还是唯一的。定理证毕。

我们可以将上面定理的条件稍微加强而得上面的定理，其证明因为与上面定理的证明类似，我们把它略去。

9. 定理 设对任意的A_1, …, $A_m \in \mathscr{B}(R)$，存在Z_+^m上的概率分布$P^{A_1,\cdots,A_m}$。为使如此给出的概率分布族

$$\{P^{A_1,\cdots,A_m}: m\geqslant 1, A_1, \cdots, A_m \in \mathscr{B}(R)\}$$

是某个点分布的有限维分布，即存在$P\in\mathscr{P}_{N(R)}$使

$$P_{A_1,\cdots,A_m} = P^{A_1,\cdots,A_m}, \quad m\geqslant 1, \quad A_1,\cdots,A_m \in \mathscr{B}(R),$$

充分必要条件是

1) 对任意的$m\geqslant 1$及任意的$l_1,\cdots, l_m \in Z_+$，等式

$$P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m) = P^{A_{i_1},\cdots,A_{i_m}}(l_{i_1},\cdots,l_{i_m})$$

对于$(1,2,\cdots,m)$的任意排列$(i_1,\cdots,i_m)$都成立；

2) 对任意非负整数$l_1,\cdots,l_{m-1}$有

$$\sum_{l_m \in Z_+} P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_{m-1},l_m) = P^{A_1,\cdots,A_{m-1}}(l_1,\cdots,l_{m-1});$$

3) 对任意的A, $B\in\mathscr{B}(R)$, $A\cap B=\phi$，有

$$P^{A,B,A\cup B}((n_1, n_2, n_3)\in Z_+^3: n_1+n_2=n_3) = 1;$$

4) 若$(A_n)\subset\mathscr{B}(R)$, $A_n\downarrow\phi$，则

$$\lim_{n\to\infty} P^{A_n}(0) = 1.$$

§3. 存在定理(二)：一般情形

10. 为了在一般的可分完备距离空间上证明点过程的存在定理，我们先作如下的准备。

设(X_1, ρ_{X_1}), (X_2, ρ_{X_2})是两个可分完备距离空间，$A\subset X_1$, $B\subset X_2$是相应空间中的Borel 子集。称A与B是同构的，并记作$A\sim B$，如果存在由A到B的映射φ，使得1）φ是满射的，即对任意的$y\in B, \varphi^{-1}(y)$不空；2）φ是一一的，即对任意x_1, $x_2\in A$，由$x_1\neq x_2$推出$\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$；3）$\varphi$与$\varphi^{-1}$都是可测的。显然"$\sim$"是等价关系。

下面的结果引自Parthasarathy (1967)第一章定理2.8及2.12。

命题 设(X, ρ_X)是任意可分完备距离空间，$A\subset X$是Borel 子集，则：或者A至多可数，或者$A\sim(0,1)$，其中$(0, 1)$上的Borel 集按通常的意义给出。

11. 引理 设(X, ρ_X)是可分完备距离空间，则存在(R, ρ_R)中的Borel 集R_0，以及由X到R_0的映射φ，使得

1) 在映射φ之下，$X\sim R_0$；

2) 映射φ将X中ρ_X意义下的有界集映为R_0中ρ_R意义下的有界集。

证明 任取$a\in X$，令$A_1=\{x: \rho_X(x,a)\leqslant 1\}$；对于自然数$n\geqslant 1$，令$A_n=\{x: n-1<\rho_X(x,a)\leqslant n\}$。这时每一$A_n$或者至多可数，从而可在$(n-1,n)$中任找一基数与$A_n$相同的有限或可列无穷集与$A_n$一一对应，这对应记为$\varphi_n$；或者$A_n$不可数，此时根据上面引述的命题，存在$A_n$到$(n-1,n)$的映射，仍记为$\varphi_n$，使$A_n\sim(n-1,n)$，令$\varphi$是$X$到$[0,\infty)$内的映射，它在$A_n$上的限制就是$\varphi_n$，又令$R_0=\varphi(X)$。于是$\varphi$及$R_0$即为所求。证毕。

12. 存在定理(一般情形) 设(X,ρ_X)是完备可分距离空间，又设对任意自然数$m\geqslant 1$及任意的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，存在$Z_+^m$上的概率分布$P^{A_1,\cdots,A_m}$。为使如此给出的概率分布族是某个点分布的有限维分布。即存在$P\in\mathscr{P}_N$，使

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=P^{A_1,\cdots,A_m},\quad m\geqslant 1,\ A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B};$$

充分必要条件是：

1) 对任意$m\geqslant 1$，任意的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$及任意非负整数$l_1,\cdots,l_m$，等式

$$P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=P^{A_{i_1},\cdots,A_{i_m}}(l_{i_1},\cdots,l_{i_m})$$

对于$(1,2,\cdots,m)$的任意排列$(i_1,\cdots,i_m)$都成立；

2) 对任意非负整数$l_1,\cdots,l_{m-1}$，有

$$\sum_{l_m\in Z_+}P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=P^{A_1,\cdots,A_{m-1}}(l_1,\cdots,l_{m-1});$$

3) 当$A,B\in\mathscr{B}$，$A\cap B=\phi$时有

$$P^{A,B,A\cup B}((n_1,n_2,n_3)\in Z_+^3:\ n_1+n_2=n_3)=1;$$

4) 若$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\downarrow\phi$，则

$$\lim_{n\to\infty}P^{A_n}(0)=1.$$

证明 设φ是前面引理中所取定的映射

$$\varphi:\ X\to R_0\subset R,$$

使$X\sim R_0$。对$m\geqslant 1$及$B_1,\cdots,B_m\in\mathscr{B}(R)$，定义

$$P_0^{B_1,\cdots,B_m}=P^{\varphi^{-1}(B_1\cap R_0),\cdots,\varphi^{-1}(B_m\cap R_0)},$$

如此得到的概率分布族

$$\{P_0^{B_1,\cdots,B_m}:\ m\geqslant 1,B_1,\cdots,B_m\in\mathscr{B}(R)\}$$

满足定理9的条件1)～4)，于是存在$P_0\in\mathscr{P}_{N(R)}$，使得

$$(P_0)_{B_1,\cdots,B_m}=P_0^{B_1,\cdots,B_m},\quad B_1,\cdots,B_m\in\mathscr{B}(R);$$

设$N(R_0)=\{\nu:\ \nu\in N(R),\ \nu(R_0^c)=0\}$，则易证$P_0(N(R_0))=1$，定义$N(R_0)$到$N$的映射$\tilde\varphi$如下：对$\nu\in N(R_0)$，令

$$\tilde\varphi(\nu)=\nu\varphi\ \text{即}\ (\tilde\varphi(\nu))(A)=\nu(\varphi(A)),\quad A\in\mathscr{B}(X);$$

易知$\tilde\varphi$是$N(R_0)$到N的可测变换，令

$$P=P_0\,\widetilde{\varphi^{-1}},$$

则$P(N)=P_0(\nu:\ \nu\in N(R_0),\nu\varphi\in N)=1$，于是$P$是$(N,\mathbf{N})$上的分布。对于任意的$m\geqslant 1$，任意的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，以及任意的$l_1,\cdots,l_m\in Z_+$，有

$$P_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=P(\mu:\ \mu(A_1)=l_1,\cdots,\mu(A_m)=l_m)$$

$$=P_0(\nu:\ \nu\in N(R_0),\ \nu\varphi(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)$$

$$=P_0(\nu:\ \nu\in N(R_0),\ \nu(\varphi(A_i))=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)=P_0^{\varphi(A_1),\cdots,\varphi(A_m)}(l_1,\cdots,l_m)$$

$$=P^{\varphi^{-1}(\varphi(A_1)\cap R_0),\cdots,\varphi^{-1}(\varphi(A_m)\cap R_0)}(l_1,\cdots,l_m)$$

$$=P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m),$$

这表明所得的点分布P即为所求，而且易知这样的点分布还是唯一的。证毕。

为了便于应用，有时我们需要另一种形式的存在定理。

13. 存在定理 设对$\mathscr{B}$中任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m$存在的Z_+^m上的概率分布$P^{A_1,\cdots,A_m}$，为使如此给定的概率分布族

$$\{P^{A_1,\cdots,A_m}:\ \ m\geqslant 1,A_1,\cdots,\ A_m\in\mathscr{B}\text{且互不相交}\}$$

是某个点分布的有限维分布，即存在$P\in\mathscr{P}_N$使

$$P^{A_1,\cdots,A_m}=P_{A_1,\cdots,A_m}\ ,A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}\text{且互不相交},$$

充分必要条件是：

1) 对于任意的$m\geqslant 1$，任意的非负整数$l_1,\cdots,l_m$，以及任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，等式

$$P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=P^{A_{i_1},\cdots,A_{i_m}}(l_{i_1},\cdots l_{i_m})$$

对于$(1,2,\cdots,m)$的任意排列$(i_1,\cdots,i_m)$都成立；

2) 对于非负整数$l_1,\cdots,l_{m-1}$，有

$$\sum_{l_m\in Z_+}P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_{m-1},l_m)=P^{A_1,\cdots,A_{m-1}}(l_1,\cdots,l_{m-1});$$

3) 如果$A_1,\cdots,A_{k-1},A_k,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，又设 $A=\bigcup_{i=k}^m A_i$，则

$$P^{A_1,\cdots,A_{k-1},A}(l_1,\cdots,l_k)=\sum_{j_k+\cdots+j_m=l_k}P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_{k-1},j_k,\cdots,j_m);$$

4) 对任意的$(A_n)\subset\mathscr{B}$，$A_n\downarrow\phi$，有

$$\lim_{n\to\infty}P^{A_n}(0)=1.$$

证明 *充分性* 为了能够应用定理12，我们需要对任意的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$构造出满足定理12的概率分布族，为此，设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$固定。令

$$B_{i_1}=A_{i_1}\setminus A_{i_1}\cap(\bigcup_{i\neq i_1}A_i),\quad 1\leqslant i_1\leqslant m;$$

$$B_{i_1i_2}=(A_{i_1}\cap A_{i_2})\setminus\{(A_{i_1}\cap A_{i_2})\cap(\bigcup_{i\neq i_1,i_2}A_i)\},\quad i_1<i_2,\ 1\leqslant i_1,\ i_2\leqslant m;$$

$$B_{i_1 i_2 i_3}=(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})\setminus\{(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})\cap(\bigcup_{i\neq i_1,i_2,i_3}A_i)\},$$

$i_1<i_2<i_3$，$1\leqslant i_1,i_2,i_3\leqslant m$；

……………………

$$B_{1,\cdots,m}=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m;$$

又对任意的$l_1,\cdots,l_m\in Z_+$，令

$$P_0^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)$$

$$=\sum_{h_1,\cdots,h_m,h_{12},\cdots,h_{m-1,m},\cdots,h_{12\cdots m}}P^{B_1,\cdots,B_m,B_{12},\cdots,B_{m-1,m},\cdots,B_{12\cdots m}}(h_1,\cdots,h_m;h_{12},\cdots,h_{m-1,m};\cdots,h_{12\cdots m}),$$

其中求和对一切满足条件

$$l_{i_1}=h_{i_1}+(\sum_{i_1<i}h_{i_1 i}+\sum_{i<i_1}h_{i i_1})+(\sum_{i_1<i<j}h_{i_1 ij}+\sum_{i<i_1<j}h_{i i_1 j}+\sum_{i<j<i_1}h_{i j i_1})+\cdots+h_{12\cdots m},\qquad 1\leqslant i_1\leqslant m,$$

的$h_1,\cdots,h_m;h_{12},\cdots,h_{m-1,m};\cdots,h_{12\cdots m}$进行。

容易看出如此定义的$P_0^{A_1,\cdots,A_m}$是Z_+^m的概率分布。我们要证明这样给出的概率分布族

$$\{P_0^{A_1,\cdots,A_m}:\quad m\geqslant 1,A_1,\cdots A_m\in\mathscr{B}\}$$

满足定理12的条件1)～4)。为了简单起见，仅取$m=2$的情况证明。这时

$$P_0^{A_1,A_2}(l_1,l_2)=\sum_{\substack{h_1+h_{12}=l_1\\h_2+h_{12}=l_2}}P^{B_1,B_2,B_{12}}(h_1,h_2,h_{12}),$$

其中$B_1=A_1\setminus(A_1\cap A_2)$，$B_2=A_2\setminus(A_2\cap A_1)$，$B_{12}=A_1\cap A_2$。

定理12中条件1)显然被满足；为了验证定理12中的条件2)，注意到

$$\sum_{l_2\in Z_+}P_0^{A_1,A_2}(l_1,l_2)$$

$$=\sum_{l_2\in Z_+}\sum_{\substack{h_1+h_{12}=l_1\\h_2+h_{12}=l_2}}P^{B_1,B_2,B_{12}}(h_1,h_2,h_{12})$$

$$=\sum_{l_2\in Z_+}\sum_{h_1+h_{12}=l_1}P^{B_1,B_2,B_{12}}(h_1,l_2-h_{12},h_{12}),$$

其中当$l_2-h_{12}<0$时令$P^{B_1,B_2,B_{12}}(h_1,l_2-h_{12},h_{12})=0$，再注意到本定理的条件3)，并令$l_2-h_{12}=s$则有

$$\sum_{l_2\in Z_+}P_0^{A_1,A_2}(l_1,l_2)=\sum_{s\in Z_+}\sum_{h_1+h_{12}=l_1}P^{B_1,B_2,B_{12}}(h_1,s,h_{12})$$

$$=\sum_{s\in Z_+}P^{B_1\cup B_{12},B_2}(l_1,s)=P^{B_1\cup B_{12}}(l_1)=P_0^{A_1}(l_1),$$

所以定理12中条件2)满足；

现在验证定理12中的条件3)。因为

$$P_0^{A,B,A\cup B}((n_1, n_2, n_3)\in Z_+^3: n_1+n_2=n_3)$$

$$=\sum_{n_3\in Z_+}\sum_{n_1+n_2=n_3} P_0^{A,B,A\cup B}(n_1, n_2, n_3) = \sum_{n_3\in Z_+}\sum_{n_1+n_2=n_3} P^{A,B}(n_1, n_2),$$

再由本定理的条件3)推出

$$P_0^{A,B,A\cup B}((n_1, n_2, n_3)\in Z_+^3: n_1+n_2=n_3) = \sum_{n_3\in Z_+} P^{A\cup B}(n_3)=1;$$

由于分布族 $\{P_0^{A_1,\cdots,A_m}: m\geqslant 1, A_1,\cdots, A_m\in\mathscr{B}\}$ 满足 定 理 12 的条件 1)～4)，故存在 $P\in\mathscr{P}_N$，使对于互不相交的 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$ 有

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=P_0^{A_1,\cdots,A_m}=P^{A_1,\cdots,A_m},$$

充分性获证。

必要性 为证必要性，我们只需由定理12的条件1)～4)推出本定理的条件3)成立即可。现在由归纳法来证明这一点。

设 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$ 且互不相交，先证明

$P^{A_1,\cdots,A_m,A_{m-1}\cup A_m}(l_1,\cdots,l_m,l_{m+1})=0$，当 $l_{m-1}+l_m\neq l_{m+1}$ 时；事实上，当 $l_{m-1}+l_m\neq l_{m+1}$ 时，由定理12的3)得

$$\sum_{l_1\in Z_+}\cdots\sum_{l_{m-2}\in Z_+} P^{A_1,\cdots,A_m,A_{m-1}\cup A_m}(l_1,\cdots,l_m,l_{m+1})$$

$$=P^{A_{m-1},A_m,A_{m-1}\cup A_m}(l_{m-1},l_m,l_{m+1})=0;$$

利用这一点，当 $l_1,\cdots l_m$ 固定时，由定理12的条件2)得

$$P^{A_1,\cdots,A_m,A_{m-1}\cup A_m}(l_1,\cdots,l_m,l_{m-1}+l_m)$$

$$=\sum_{l_{m+1}\in Z_+} P^{A_1,\cdots,A_m,A_{m-1}\cup A_m}(l_1,\cdots,l_m,l_{m+1}) = P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m),$$

利用这个等式，当 $l_1,\cdots,l_{m-2},l_{m+1}$ 固定时，则有

$$P^{A_1,\cdots,A_{m-2},A_{m-1}\cup A_m}(l_1,\cdots,l_{m-2},l_{m+1})$$

$$=\sum_{l_{m-1}\in Z_+}\sum_{l_m\in Z_+} P^{A_1,\cdots,A_m,A_{m-1}\cup A_m}(l_1,\cdots,l_m\, l_{m+1})$$

$$=\sum_{l_{m-1}+l_m=l_{m+1}} P^{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m),$$

这就证明了当 $k=m-1$ 时本定理的条件3)成立，于是运用归纳法容易得出本定理的条件3)。必要性获证。定理证毕。

§4. 简 单 点 分 布

14. 给定基本相空间 (X,ρ_X)，考虑 X 上的计数测度 $\mu\in N$。如果对所 有的 $a\in X$ 都有

$$\mu(a)\leqslant 1,$$

则称 μ 是简单的。记

$$N_S=\{\mu:\mu\in N,\ \mu\text{ 是简单的}\}.$$

对任意的 $\mu\in N$，令

$$\mu^*(\cdot)=\sum_{a\in X,\mu(a)>0}\delta_a(\cdot),$$

则 $\mu^*\in N_S$，称 μ^* 为与 μ 对应的简单计数测度。

下面我们将要证明 $N_S\in\mathbf{N}$，因此若 $P\in\mathscr{P}_N$，则 $P(N_S)$ 有意义。如果$P(N_S)=1$，我们就称 P 是简单点分布。

15. 设 $A\in\mathscr{A}$，$(\mathscr{D})\subset\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}$ 中至多可列个互不相交的集合组成的集族，如果 $A=\bigcup_{D\in\mathscr{D}}D$，则称$(\mathscr{D})$是 A 的一个分割。记

$$d(\mathscr{D})=\sup_{D\in\mathscr{D}}d(D),$$

这里 $d(D)$ 是有界集 D 的直径。如果 $(\mathscr{D}_n)$ 是集 A 的一列分割，满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}d(\mathscr{D}_n)=0,$$

则称 $(\mathscr{D}_n)$ 是 A 的无穷小分割序列。由于 X 的可分性，每个 $A\in\mathscr{A}$ 都存在无穷小分割序列。

16. 定理 设 $\mu\in N$，$A\in\mathscr{A}$，对于 A 的任意无穷小分割序列 $(\mathscr{D}_n)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)=\mu^*(A).$$

证明 设 B 是任意含于 A 的有界集。集合

$$\{a:a\in B,\ \mu(a)>0\}$$

只能是有限集。如果它是空集，则 $\mu^*(B)=0$；如果它是单点集，则 $\mu^*(B)=1$；如果它是两点以上的集，则必定存在两点之间的最小正距离，无论在哪种情况，当 n 充分大时都有

$$\mu^*(B)\leqslant\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)\leqslant\mu^*(A),$$

于是

$$\mu^*(B)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)\leqslant\mu^*(A),$$

又因 μ^* 是 $\mathscr{A}$ 上的测度，在上式左边令 $B\uparrow A$，则

$$\mu^*(A)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)\leqslant\mu^*(A),$$

这说明$\mu^*(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)$.

17. 推论 由$(N,\ \mathbf{N})$到$(N,\ \mathbf{N})$的映射

$$\mu\frown\mu^*$$

是可测的，又$N_S\in\mathbf{N}$。

证明 由N的构造可知，我们只须证明：对每个$A\in\mathscr{B}$，$\mu^*(A)$是N可测的函数。这是明显的，因为若将$\mu^*(A)$按上一段的表达式表出，则表达式的右端显然是N可测的。又因为由N_s的定义，$\mu\in N_s$等价于$\mu=\mu^*$，于是由$\mu^*(A)$的可测性得：

$$N_s=\{\mu:\ \mu\in N,\ \mu=\mu^*\}=\bigcap_{A\in\Gamma}\{\mu:\ \mu\in N,\ \mu(A)=\mu^*(A)\}\in\mathbf{N},$$

此处$\Gamma\subset\mathscr{B}$是某个可数环，满足$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$（例如$\Gamma$可取为$X$中由有界开集作成的可数基所产生的环）。

18. 引理 设$\Gamma\subset\mathscr{B}$是环，$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$，又设$P\in\mathscr{P}_N$。则对任意的$\varepsilon>0$及任意的$A\in\mathscr{B}$，存在$A_\varepsilon\in\Gamma$使

$$P(\mu\in N:\ \mu(A\Delta A_\varepsilon)>0)<\varepsilon,$$

这里Δ表示对称差。

证明 以Γ_1记$\mathscr{B}$中使引理结论成立的集，则$\Gamma_1\supset\Gamma$。设$A_n\in\Gamma_1$，$A_n\downarrow A=\bigcap_n A_n$。给定$\varepsilon>0$，若对每个$n$已选得满足条件的$A_{n,\varepsilon}\in\Gamma$使

$$P(\mu\in N:\ \mu(A_n\Delta A_{n,\varepsilon})>0)<\varepsilon,\ (n=1,2,\ \cdots),$$

则有

$$P(\mu\in N:\mu(A\Delta A_{n,\varepsilon})>0)\leqslant P(\mu\in N:\mu(A_n\Delta A_{n,\varepsilon})>0)$$
$$+P(\mu\in N;\ \mu(A_n\backslash A)>0)<\varepsilon+P(\mu\in N;\ \mu(A_n\backslash A)>0);$$

但当$n\to\infty$时$P(\mu\in N;\ \mu(A_n\backslash A)>0)\to0$，所以当$n$充分大时，$P(\mu\varepsilon N;\ \mu(A\Delta A_{n,\varepsilon})>0)<2\varepsilon$，这说明$A\in\Gamma_1$；类似可证明，当$A_n\in\Gamma_1$，$A_n\uparrow A=\bigcup_n A_n\in\mathscr{B}$时，有$A\in\Gamma_1$。于是$\Gamma_1$是局部单调类，应用局部单调类定理知$\Gamma_1=\mathscr{B}$。

应用这个引理，我们证明如下的定理，它的含意是：一个简单点分布可以从它的有限维分布获得合理的解释。

19. 定理 设$\Gamma\subset\mathscr{B}$是半环，$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$，$P\in\mathscr{P}_N$。点分布$P$是简单点分布的充分必要条件是：对任意的$\varepsilon>0$及任意的$A\in\Gamma$，存在有限个互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，使$A=\bigcup_{i=1}^m A_m$，并且

$$P(\mu\in N:\ \mu(A_i)\leqslant1,\ 1\leqslant i\leqslant m)>1-\varepsilon.$$

证明 充分性 设$A\in\Gamma$，对任意的$\varepsilon>0$，取满足条件的$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，使$A=\bigcup_{i=1}^m A_i$，则

$$P(\mu:\ \mu(A)\neq\mu^*(A))\leqslant P\left\{\bigcup_{i=1}^m(\mu:\ \mu(A_i)>1)\right\}<\varepsilon,$$

由于ε的任意性，所以实际上

$$P(\mu:\ \mu(A)\neq\mu^*(A))=0,\ \text{凡}A\in\Gamma;$$

现设$B\in\mathscr{B}$，由于B可用Γ中的可列个集来覆盖，并且

$$P(\mu:\ \mu(B)\neq\mu^*(B))\leqslant P\left\{\bigcup_{i=1}^\infty(\mu:\ \mu(A_i)\neq\mu^*(A_i))\right\}$$

其中 $B\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，$A_i\in\Gamma$，$(i=1,2,\cdots)$。所以

$$P(\mu:\ \mu(B)\neq\mu^*(B))=0,\ \text{凡}B\in\mathscr{B}。$$

取$(B_n)\subset\mathscr{B}$，$B_n\uparrow X$，则

$$P(\mu:\ \mu\neq\mu^*)\leqslant P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu:\mu(B)\neq\mu^*(B))\right\}=0,$$

这说明$P(N_s)=1$，即P是简单点分布。

必要性　设P是简单点分布，$A\in\Gamma$ 固定。又设$(\mathscr{D}_n)$是A的无穷小分割序列，满足

若$D\in\mathscr{D}_{n+1}$，则存在$D'\in\mathscr{D}_n$，使$D\subset D'$；

容易知道这样的无穷小分割序列$(\mathscr{D}_n)$必存在。我们要证明：

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\bigcup_{D\in\mathscr{D}_n}(\mu:\ \mu(D)>1)\right\}=P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{D\in\mathscr{D}_n}(\mu:\ \mu(D)>1)\right\}=0。$$

事实上，设$\mu\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{D\in\mathscr{D}_n}(\mu:\ \mu(D)>1)$，则一方面

$$\mu\in\bigcup_{D\in\mathscr{D}_n}(\mu:\ \mu(D)>1),\ n=1,2,\cdots;$$

另一方面，由于集$\{a:\ a\in A,\ \mu(a)>0\}$是有限集（无妨设它至少含有两个点），其中任意两点的距离必有正的下界d，所以当n充分大时，$\mathscr{D}_n$中的每一D或者与$\{a:\ a\in A,\ \mu(a)>0\}$不相交，或者只能有唯一的公共点，于是$\mu\in\bigcup_{D\in\mathscr{D}_n}(\mu:\mu(D)>1)$表明$\mu\in N_s^c$，所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{D\in\mathscr{D}_n}(\mu:\ \mu(D)>1)\subset N_s^c\ ,$$

由于P是简单的，故$P(N_s^c)=0$，从而证得我们的断言。

现设$\varepsilon>0$，由已证的事实可知：存在A的分割$\mathscr{D}=(B_n)$，使

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mu:\ \mu(B_n)>1\right\}<\varepsilon/4;$$

因为$(A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}B_n)\downarrow\phi,(k\to\infty)$，故$P(\mu:\ \mu(A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}B_n)>0)\downarrow 0,(k\to\infty)$。于是可选取充分大的$k$，并令

$$B_1'=B_1,\cdots,B_{k-1}'=B_{k-1},B_k'=\bigcup_{n=k}^{\infty}B_n,\ \text{使得}$$

$$A=\bigcup_{i=1}^{k}B_i',P(\mu:\ \mu(B_i')\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant k)>1-\varepsilon/2;$$

根据引理18，存在$C_1,\cdots,C_k\in\Gamma^*$（$\Gamma^*$是$\Gamma$产生的环），使得

$$P(\mu:\mu(B_i'\,\Delta C_i)>0)<\varepsilon/4_k,\qquad i=1,2,\cdots,k;$$

令$C_{k+1}=A\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}C_i$，则$C_1\cdots,C_{k+1}\in\Gamma^*$，而且是$A$的一个覆盖。我们有

$$P\bigcup_{i=1}^{k+1}(\mu:\ \mu(C_i)>1)\leqslant P\bigcup_{i=1}^{k}(\mu:\ \mu(C_i)>1)+P(\mu:\ \mu(C_{k+1})>1)$$

$$\leqslant P\bigcup_{i=1}^{k}(\mu:\ \mu(B_i')>1)+P(\mu:\ \mu(\bigcup_{i=1}^{k}(C_i\setminus B_i'))>0)+P(\mu:\mu(\bigcup_{i=1}^{k}(B_i'\setminus C_i))$$

$$>0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2\sum_{i=1}^{k}P(\mu:\ \mu(C_i\Delta B_i')>0)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2k\varepsilon}{4k}=\varepsilon,$$

这里我们用到$C_{k+1}=A\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{k}C_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}(B_i'\setminus C_i)$。

现在取$D_i=C_i\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{i-1}C_j(i=2,\cdots,k+1)$，$D_1=C_1$，则更有

$$P(\mu:\ \mu(D_i)\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant k+1)>1-\varepsilon;$$

最后，由于Γ^*由半环Γ生成，故可以选取$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，它们互不相交，而且$\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_m=A$，$A\cap D_i(1\leqslant i\leqslant k+1)$都是某些$A_j$之并，这就更加有

$P(\mu:\ \mu(A_j)\leqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant m)>1-\varepsilon$，定理证完。

为了获得简单点分布进一步的性质，引入如下的定义。

设$\varphi(\cdot)$是$\mathscr{B}$上定义的集函数，令

$$\Delta_A\varphi(B)=\varphi(A\cup B)-\varphi(B),\qquad A,\ B\in\mathscr{B};$$

$\Delta_A\varphi(\cdot)$作为$\mathscr{B}$上定义的集函数，又可定义

$$\Delta_{A_1}\Delta_{A_2}\varphi(B)=\Delta_{A_1}(\Delta_{A_2}\varphi(B)),\qquad A_1,A_2,B\in\mathscr{B};$$

一般地，对$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{B}$，定义

$$\Delta_{A_1}\Delta_{A_2}\cdots\Delta_{A_{n-1}}\Delta_{A_n}\varphi(B)=\Delta_{A_1}\Delta_{A_2}\cdots\Delta_{A_{n-1}}(\Delta_{A_n}\varphi(B)),\ B\in\mathscr{B}.$$

如果对于任意的$n\geqslant1$，任意的$A_1,\cdots,A_n,B\in\mathscr{B}$，有

$$(-1)^n\Delta_{A_1}\Delta_{A_2}\cdots\Delta_{A_n}\varphi(B)\geqslant0,$$

则称集函数$\varphi(\cdot)$是完全单调的。

20. 引理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则集函数$\varphi(B)=P(\mu:\mu(B)=0$是完全单调的。

证明 对任意的$A\in\mathscr{B}$，有

$$-\Delta_A\varphi(B)=\varphi(B)-\varphi(A\cup B)=P(\mu:\mu(B)=0,\ \mu(A\cup B)>0)$$
$$=P(\mu:\mu(B)=0,\ \mu(A)>0)\geqslant0,\ 凡\ B\in\mathscr{B};$$

假定对任意的$A_1,\cdots,A_n$，已证明

$$(-1)^n\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_n}\varphi(B)=P(\mu:\mu(B)=0,\ \mu(A_i)>0,\ 1\leqslant i\leqslant n),\ 凡\ B\in\mathscr{B};$$

则对$A_1,\cdots,A_n,A_{n+1}\in\mathscr{B}$，有

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1}\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_n}\Delta_{A_{n+1}}\varphi(B)\\
&=(-1)^n\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_n}\varphi(B)-(-1)^n\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_n}\varphi(B\cup A_{n+1})\\
&=P(\mu:\mu(B)=0,\ \mu(A_i)>0,\ 1\leqslant i\leqslant n)-P(\mu:\mu(B\cup A_{n+1})=0,\ \mu(A_i)>0,\ 1\leqslant i\leqslant n)\\
&=P(\mu:\mu(B)=0,\ \mu(A_i)>0,\ 1\leqslant i\leqslant n+1)\geqslant 0;
\end{aligned}
$$

由归纳法得证引理。

21. 引理 设 $P\in\mathscr{P}_N$，$A_0, A_1, \cdots, A_m$ 是 $\mathscr{B}$ 中互不相交的有限集列，则

$$
\begin{aligned}
&P(\mu:\mu(A_0)=0,\ \mu(A_i)>0,\ 1\leqslant i\leqslant m)\\
&\qquad=\sum_{0<r<m}(-1)^r\sum_{1<i_1<\cdots<i_r<m}P(\mu:\mu(A_0\cup(\bigcup_{s=1}^{r}A_{i_s}))=0).
\end{aligned}
$$

证明 我们对任意的完全单调集函数 $\varphi(\cdot)$ 证明下式：

$$
\begin{aligned}
&(-1)^m\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_m}\varphi(A_0)\\
&=\sum_{0<r<m}(-1)^r\sum_{1<i_1<\cdots<i_r<m}\varphi(A_0\cup(\bigcup_{s=1}^{r}A_{i_s})),
\end{aligned}
$$

其中 $A_0, A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{B}$ 且互不相交。假定上式 对 某 个 $m\geqslant 1$ 成立（特别，当 $m=1$，上式成立是显然的），则

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{m+1}\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_m}\Delta_{A_{m+1}}\varphi(A_0)\\
&=(-1)^m\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_m}\varphi(A_0)-(-1)^m\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_m}\varphi(A_0\cup A_{m+1})\\
&=\sum_{0<r<m}(-1)^r\sum_{1<i<\cdots<i_r<m}\varphi(A_0\cup(\bigcup_{s=1}^{r}A_{i_s}))\\
&\quad-\sum_{0<r<m}(-1)^r\sum_{1<i_1<\cdots<i_r<m}\varphi(A_0\cup A_{m+1}\cup(\bigcup_{s=1}^{r}A_{i_s}))\\
&=\sum_{0<r<m}(-1)^r\sum_{1<i_1<\cdots<i_r<m}\varphi(A_0\cup(\bigcup_{s=1}^{r}A_{i_s}))\\
&\quad+\sum_{0<r<m}(-1)^{r+1}\sum_{1<i_1<\cdots<i_r<m}\varphi(A_0\cup A_{m+1}\cup(\bigcup_{s=1}^{r}A_{i_s}))\\
&=\sum_{0<r<m+1}(-1)^r\sum_{1<i_1<\cdots<i_r<m+1}\varphi(A_0\cup(\bigcup_{s=1}^{r}A_{i_s})),
\end{aligned}
$$

由归纳法即得欲证的等式，特别令 $\varphi(A)=P(\mu:\mu(A)=0)$，则引理获证。

22. 定义 设 $P\in\mathscr{P}_N$，令

$$
\phi(A)=P(\mu:\mu(A)=0),\quad A\in\mathscr{B},
$$

并称之为 P 的零概率函数。由前面两个引理可知，一切如下形式的集合

$$
(\mu:\mu(A_0)=0,\ \mu(A_i)>0,\ 1\leqslant i\leqslant m)
$$

的概率，可用零概率函数表出。这里 $A_0, A_1, \cdots, A_m\in\mathscr{B}$ 并且互不相交。此外，对于互不

相交的 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，以及任意的 i，$1\leqslant i\leqslant m$，有

$$(-1)^i\Delta_{A_1}\cdots\Delta_{A_i}\varphi(\bigcup_{i<r\leqslant m}A_r)$$

$$=P(\mu:\mu(A_j)>0,\ 1\leqslant j\leqslant i;\ \mu(A_r)=0,\ i<r\leqslant m),$$

这只要在前面引理的证明中取 $A_0=\bigcup_{r=i+1}^{m}A_r$ 即可。

下面我们仍然回到简单点分布的讨论。

由定理16及其推论，知 $\mu\frown\mu^*$ 是由 $(N,\mathbf{N})$ 到自身的可测映射，这个映射将 $P\in\mathscr{P}_N$ 映为 $(N,\mathbf{N})$ 上的简单点分布，记之为 P^*，于是 $P^*(\mu:\mu\notin N_s)=0$。显然，$P\in\mathscr{P}_N$ 是简单的，当且仅当 $P=P^*$。

对于任意两个 P，$Q\in\mathscr{P}_N$，P 与 Q 可能不一样，但只要它们有相同的零概率函数，则 $P^*=Q^*$，这便是下面的定理。这个定理指出，对于任意的 $P\in\mathscr{P}_N$，相应的 P^* 完全由 P 的零概率函数唯一确定，特别当 P 是简单点分布时，$P=P^*$，所以 P 也就由零概率函数唯一确定。

23. 定理 设 $\Gamma\subset\mathscr{B}$ 是环，$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$，又设 P，$Q\in\mathscr{P}_N$。如果对任意的 $A\in\Gamma$，有

$$P(\mu:\mu(A)=0)=Q(\mu:\mu(A)=0),$$

则 $P^*=Q^*$。

证明 令 $R=\frac{1}{2}(P^*+Q^*)$，则 R 是简单点分布。设 $A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，$A_1,\cdots,A_m$ 互不相交。由引理19知，对每个 A_i，$(1\leqslant i\leqslant m)$ 存在互不相交的有限序列 $B_{i1},\cdots,B_{in_i}\in\Gamma$，使 $A_i=\bigcup_{j=1}^{n_i}B_{ij}$，并且使

$$R(\mu:\mu(B_{ij})\leqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant n_i)>1-\varepsilon,\ (1\leqslant i\leqslant m),$$

$$P^*(\mu:\mu(B_{ij})\leqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant n_i)>1-\varepsilon\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

$$Q^*(\mu:\mu(B_{ij})\leqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant n_i)>1-\varepsilon,\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

同时成立，其中 $\varepsilon>0$ 是预先给定的正数。

现在令

$$I=((i,j):1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n_i).$$

对任意的非负整数 $l_1,\cdots,l_m(0\leqslant l_i\leqslant n_i)$，令 J 是 I 的满足如下条件的子集：J 的 i 截口刚好有 l_i 个元。如此得到的全体 J 记为 $\mathscr{L}$。于是我们有

$$P^*(\mu:\ \mu(A_i)=l_i,1\leqslant i\leqslant m;\ \mu(B_{ij})\leqslant 1,\ (i,j)\in I)$$

$$=\sum_{J\in\mathscr{L}}P^*(\mu:\ \mu(B_{ij})>0,\ (i,j)\in J;\ \mu(B_{ij})=0,\ (i,j)\in I\backslash J)$$

$$-\sum_{J\in\mathscr{L}}P^*(\mu:\ \mu(B_{ij})>0,(i,j)\in J;\mu(B_{ij})=0,(i,j)\in I\backslash J;$$

$$\mu(B_{ij})>1\text{至少对某个}(i,j)\in J);$$

上式中，若令 $\sum_{i=1}^{m} l_i \neq 0$，右边第二项和式中的集合均包含在

$$(\mu:\ \mu(B_{ij})>1,\ \text{至少一个}(i,j)\in I)$$

之中，注意到

$$\begin{aligned}&P^*(\mu:\ \mu(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)\\&\quad -P^*(\mu:\ \mu(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m;\ \mu(B_{ij})\leqslant 1,\ (i,j)\in I)\\&\leqslant P^*(\mu:\ \mu(B_{ij})>1,\text{至少一个}(i,j)\in I)\leqslant me,\end{aligned}$$

结合上面得

$$\begin{aligned}&|P^*(\mu:\ \mu(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)\\&\quad -\sum_{J\in\mathscr{L}} P^*(\mu:\ \mu(B_{ij})>0,\ (i,j)\in J;\ \mu(B_{ij})=0,\ (i,j)\in I\backslash J)|\\&\leqslant 2P^*(\mu:\ \mu(B_{ij})>1,\text{至少对一个}(i,j)\in I)\leqslant 2me,\end{aligned}$$

同样的不等式对Q^*也成立。又因为对每个$J\in\mathscr{L}$，由引理21，

$$\begin{aligned}&P^*(\mu:\ \mu(B_{ij})>0,(i,j)\in J;\mu(B_{ij})=0,(i,j)\in I\backslash J)\\&=Q^*(\mu:\ \mu(B_{ij})>0,\ (i,j)\in J;\ \mu(B_{ij})=0,\ (i,j)\in I\backslash J),\end{aligned}$$

所以最后得

$$|P^*(\mu:\ \mu(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)-Q^*(\mu:\ \mu(A_i)=l_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)|\leqslant 4me;$$

由于m是固定的，e是任意的，再注意当$l_1=\cdots=l_m=0$时

$$\begin{aligned}&P^*_{A_1,\cdots,A_m}(0,\cdots,0)=P(\mu:\ \mu(A_i)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m)\\&=Q(\mu:\ \mu(A_i)=0,\ 1\leqslant i\leqslant m)=Q^*_{A_1,\cdots,A_m}(0,\cdots,0),\end{aligned}$$

我们得到 $P^*_{A_1,\cdots,A_m}=Q^*_{A_1,\cdots,A_m}$，此式对一切互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$成立，所以由推论5知$P^*=Q^*$。 证毕

上述定理指出，P和Q只要有相同的零概率函数，它们对应的简单点分布也就相同。我们可以将$\mathscr{P}_N$中的元素按照简单点分布来分类。对任意的$P,Q\in\mathscr{P}_N$，若$P^*=Q^*$，则称P与Q几乎等价，记为$P\sim Q(a.e)$。容易知道这是$\mathscr{P}_N$中的等价关系，如果按这等价关系将$\mathscr{P}_N$中元素分为等价类，则上面的定理表明，每一等价类对应着唯一的零概率函数。由于零概率函数是满足条件 $\varphi(\phi)=P(\mu:\ \mu(\phi)=0)=1$ 的完全单调集函数，于是产生一个有趣的问题：如果在$\mathscr{B}$上给定了满足条件$\varphi(\phi)=1$的完全单调集函数$\varphi(\cdot)$，是否一定存在$P\in\mathscr{P}_N$，使$\varphi(A)=P(\mu:\ \mu(A)=0),A\in\mathscr{B}$？（这个问题参看Kurtz 1974）。下面的例子表明，从$P\sim Q(a.e)$不能推出$P=Q$。

设$a\in X$是某一固定点，令$P,Q\in\mathscr{P}_N$分别为：$P(\delta_a)=1$，$Q(2\delta_a)=1$，则$P^*=Q^*$，即$P\sim Q(a.e)$，但是$P\neq Q$。然而我们有下面的定理。

24. 定理 设$\Gamma\subset\mathscr{B}$是环，$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$。如果$P,Q\in\mathscr{P}_N$满足下列条件：

1) Q是简单的；

2) $P(\mu:\ \mu(A)=0)=Q(\mu:\ \mu(A)=0)$，凡$A\in\Gamma$；

3) $P(\mu:\ \mu(A)>1)\leqslant Q(\mu:\ \mu(A)>1)$，凡$A\in\Gamma$；

则$P=Q$。

证明 对于任意的$A\in\Gamma$及任意的$\varepsilon>0$，由于Q是简单的，所以由定理19，存在Γ中互不相交的$A_1,\cdots,A_m$使$A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$，并且

$$Q(\mu:\ \mu(A_i)\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant m)>1-\varepsilon;$$

又由条件2)及定理23，有$P^*=Q^*=Q$，所以也有

$$P^*(\mu:\ \mu(A_i)\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant m)>1-\varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned}&P(\mu:\ \mu(A_i)>1,\ \text{至少对一个}\ i,\ 1\leqslant i\leqslant m)\\&\leqslant\varepsilon+P(\mu:\ \mu(A_i)>1,\ \text{至少对一个}\ i,\ 1\leqslant i\leqslant m;\ \mu^*(A_i)\leqslant 1,\text{对一切}\ i,\\&\qquad 1\leqslant i\leqslant m)\\&\leqslant\varepsilon+P\bigcup_{i=1}^{m}(\mu:\ \mu(A_i)>1,\mu^*(A_i)\leqslant 1)\leqslant\varepsilon+\sum_{i=1}^{m}P(\mu:\mu(A_i)>1,\mu^*(A_i)\leqslant 1)\\&\leqslant\varepsilon+\sum_{i=1}^{m}[P(\mu:\ \mu(A_i)>1)-P^*(\mu:\ \mu(A_i)>1)]\\&\leqslant\varepsilon+\sum_{i=1}^{m}[Q(\mu:\ \mu(A_i)>1)-Q^*(\mu:\ \mu(A_i)>1)]=\varepsilon,\end{aligned}$$

最后两步我们用到条件3)及等式$P^*=Q^*$.于是

$$P(\mu:\ \mu(A_i)\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant m)>1-\varepsilon,$$

再次用定理19，知道P是简单的，所以

$$P=P^*=Q^*=Q,\quad \text{证毕。}$$

下面我们讨论与简单性有密切关系的有序性问题。

§5. 有序点分布

25. 有序性是最早引入点过程理论的基本概念之一。我们先给出它的定义，然后证明，在很一般的情况下，它与简单性是一回事。

设$P\in\mathscr{P}_N$，称P是有序的，如果对任意给定的$\varepsilon>0$，存在X的分割$(\mathscr{D})$使

$$\sum_{D\in\mathscr{D}}P(\mu:\ \mu(D)>1)<\varepsilon.$$

从这个定义出发，如果P是有序的，$(\mathscr{D})$是满足上述条件的X的分割，那么对任意的$A\in\mathscr{A}$，$(\mathscr{D}')=(A\cap\mathscr{D})$是$A$的分割，而且

$$\sum_{D\in\mathscr{D}'}P(\mu:\ \mu(D)>1)<\varepsilon;$$

反之，如果对任意的$A\in\mathscr{B}$，存在A的分割$(\mathscr{D}_A)$使

$$\sum_{D\in\mathscr{D}_A}P(\mu:\ \mu(D)>1)<\varepsilon,$$

则可证明P是有序的。

事实上，选取$\mathscr{B}$中一列互不相交的A_n覆盖X，对$\varepsilon>0$，取A_n的分割$(\mathscr{D}_{A_n})$使

$$\sum_{D\in\mathscr{D}_{A_n}} P(\mu:\ \mu(D)>1)<\frac{\varepsilon}{2^n},\quad n=1,2,\cdots$$

取$(\mathscr{D})=(\bigcup_n \mathscr{D}_{A_n})$，则$(\mathscr{D})$是$X$的一个分割，满足

$$\sum_{D\in\mathscr{D}} P(\mu:\ \mu(D)>1)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

26. 引理 若$P\in\mathscr{P}_N$是有序的，则P是简单的。

证明 任给X的分割$(\mathscr{D})$，则

$$P(\mu:\ \mu\notin N_s)\leqslant\sum_{D\in\mathscr{D}} P(\mu:\ \mu(D)\neq\mu^*(D))\leqslant\sum_{D\in\mathscr{D}} P(\mu:\ \mu(D)>1)$$

于是当P为有序时，由定义，可使得$P(\mu:\ \mu\notin N_s)$任意小，从而$P(\mu:\ \mu\notin N_s)=0$，故P为简单分布。

然而，反面的结论一般不成立。虽然如此，对于十分广泛的一类点过程而言，简单性与有序性是一回事，为证此，先引进一个定义。

27. 定义 设$P\in\mathscr{P}_N$。对任意的$A\in\mathscr{B}$，$Y\in\mathbf{N}$，令

$$\mathscr{C}_P(A\times Y)=\int_Y \mu(A)P(d\mu)$$

如此定义的$\mathscr{C}_P$可以扩张为$\mathscr{A}\times\mathbf{N}$上的测度，称$\mathscr{C}_P$为$P$的Campbell测度。

记$I_P(A)=\mathscr{C}_P(A\times N)$，$A\in\mathscr{B}$。称测度$I_P(\cdot)$为$P$的强度测度，它是$(X,\mathscr{A})$上的测度。如果它还是局部有限的，即

$$I_P(A)=\int\mu(A)P(d\mu)<+\infty,\quad \text{凡}A\in\mathscr{B},$$

则称点分布P具有局部有限的强度测度。

下述引理是卡洛留克定理的一种形式。

28. 引理 设$P\in\mathscr{P}_N$，$I_P\in M$，$A\in\mathscr{B}$。则对A的任意无穷小分割序列$(\mathscr{D}_n)$有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n} P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)=1)=\mathscr{C}_P(A\times N_s)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n} P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>0).$$

证明 当$\mu\in N_s$时，由定理16，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)=\mu^*(A)=\mu(A).$$

由控制收敛定理得

$$\mathscr{C}_P(A\times N_s)=\int_{N_s}\mu(A)P(d\mu)=\int_{N_s}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)\right]P(d\mu)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{N_S}\Big[\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\min(\mu(D),1)\Big]P(d\mu) = \lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\int_{N_S}\min(\mu(D),1)P(d\mu)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>0),$$

这便证得欲证等式之右半部分。在证明过程中，为了应用控制收敛定理，我们需要 $\int_{N_s}\mu(A)P(d\mu)<\infty$，这是由定理条件$I_P\in M$保证的。

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)=1)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}[P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>0)-P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>1)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>0)-\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>1)\Big],$$

故只要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu\in N_s,\mu(D)>1)=0$，由前面已证的结果，便可得到欲证等式的左半部分。实际上，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>1) = \lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\sum_{k=2}^{\infty}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)=k)$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}kP(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)=k)-\sum_{k=1}^{\infty}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)=k)\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}[\mathscr{C}_P(D\times N_s)-P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>0)]$$

$$= \mathscr{C}_P(A\times N_s)-\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu\in N_s,\ \mu(D)>0)=0,$$ 引理证毕。

下面的定理指出，当$P\in\mathscr{P}_N$，$I_P\in M$时，P的简单性与有序性是一回事。

29．定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，$I_P\in M$，则下述命题等价：

1） P是简单的；

2） 对任意的$A\in\mathscr{B}$以及A的无穷小分割序列$(\mathscr{D}_n)$有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu(D)=1)=I_P(A);$$

3） 对任意的$A\in\mathscr{B}$以及A的无穷小分割序列$(\mathscr{D}_n)$有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu(D)>0)=I_P(A);$$

4） P是有序的。

证明 1)⇒2)。由于P是简单的，所以$P(N_s)=1$，在前面的引理28中用N代替N_s即得

$$I_P(A)=\mathscr{C}_P(A\times N)=\lim_{n\to\infty}\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu(D)=1).$$

2)⇒3) 直接由引理28推出，因为总有$\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu(D)>0)\leqslant I_P(A)$。

3)⇒4) 由于

$$\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\ \mu(D)>1)=\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\sum_{k=2}^{\infty}P(\mu:\mu(D)=k)$$

$$\leqslant\sum_{D\in\mathscr{D}_n}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}kP(\mu:\mu(D)=k)-\sum_{k=1}^{\infty}P(\mu:\ \mu(D)=k)\Big]$$

$$=I_P(A)-\sum_{D\in\mathscr{D}_n}P(\mu:\mu(D)>0),$$

所以由条件3)，当$n\to\infty$时，上式右端趋于0；于是可找到充分大的n使上式左端小于事先给定的$\varepsilon>0$，这表明P是有序的。

4)⇒1) 见引理26. 得证。

§6 无后效分布

30. 定义 设$P\in\mathscr{P}_N$。如果对$\mathscr{A}$中任意不相交的$A_1,\cdots,A_m$，总有

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=P_{A_1}\times\cdots\times P_{A_m},$$

则称P是无后效的。上式意味着，对任意的非负整数$l_1,\cdots l_m$，有

$$P_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=\prod_{i=1}^{m}P_{A_i}(l_i).$$

P的无后效性等价于$(N,\mathbf{N},P)$上的随机变量$\mu(A_1),\mu(A_2),\cdots,\mu(A_m)$的相互独立性（$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{A}$且互不相交），有时也称$P$具有独立增量。

无后效性也是最早引入点过程理论的基本概念之一。众所周知，有序性、无后效性以及平稳性是最早研究随机事件流的基本假定。

31. 引理 对任意的$P\in\mathscr{P}_N$，集合

$$X_P=\{a:\ a\in X,\ P(\mu:\ \mu(a)>0)>0\}$$

至多是可数集。

证明 只需证明：对任意固定的$B\in\mathscr{A}$及任意固定的$\varepsilon>0$，关系式

$$P(\mu:\ \mu(a)\geqslant\varepsilon)\geqslant\varepsilon$$

至多对有限多个$a\in B$成立。

假设此关系式对B中无穷多个$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，成立，则由 Eatou 引理导出如下矛盾：

$$0=P(\mu:\ \mu(B)=\infty)\geqslant P(\limsup_{n\to\infty}\ (\mu:\ \mu(a_n)\geqslant\varepsilon))$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \sup P(\mu:\mu(a_n)\geqslant\epsilon)\geqslant\epsilon.$$

32. 设$A\in\mathscr{A}$，我们曾经以$A\mu$表示计数测度μ在A上的限制，即$A\mu(\cdot)=\mu(A\cap\cdot)$。当$\mu$在$N$上变动时，映射$\mu\frown A\mu$是可测的。对于任意的$P\in\mathscr{P}_N$，我们以$_AP$记$P$在此映射之下所诱导的测度，显然$_AP\in\mathscr{P}_N$。

由于上面的引理，对于$P\in\mathscr{P}_N$，集合

$$X_P^c=\{a;\ a\in X,\ P(\mu;\ \mu(a)>0)=0\}\in\mathscr{A},$$

记$P_c={}_{X_P^c}P$，并称之为P的连续部分；记$P_d={}_{X_P}P$，并称之为P的离散部分。称P是离散的，如果$P_c=\delta_0$；称P是扩散的（或连续的），如果$P_d=\delta_0$，这里"0"表示$(X,\mathscr{A})$上的零测度，而δ_0表示$(N,\mathbf{N})$上的概率分布，满足$\delta_0(0)=1$。显然δ_0是$\mathscr{P}_N$中唯一的既扩散又离散的分布。

从无后效的定义立即推出，当$P\in\mathscr{P}_N$是无后效分布时，对于任意的$P\in\mathscr{A}$，$_AP$也是无后效的，特别，P的离散部分P_d及连续部分P_c也是无后效的。

33. 引理 设$\Gamma\subset\mathscr{B}$是半环，$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$。$P\in\mathscr{P}_N$是无后效的，当且仅当对于任意的$m\geqslant2$，以及$\Gamma$中任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m$，有

$$P_{A_1\cdots A_m}=P_{A_1}\times\cdots\times P_{A_m}.$$

证明 以Γ^*记Γ产生的子环，设$B_1,\cdots,B_m\in\Gamma^*$且互不相交，每个$B_i$都可表为

$$B_i=\bigcup_{j=1}^{n_i}A_{ij},\quad A_{ij}\in\Gamma,\quad(1\leqslant j\leqslant n_i)\text{且互不相交。}$$

由假定

$$\{\mu(A_{ij});\ 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n_i\}$$

关于分布P是相互独立的，所以

$$\{\mu(B_i)=\sum_{j=1}^{n_i}\mu(A_{ij}),\ 1\leqslant i\leqslant m\}$$

关于分布P也是相互独立的。

现设$B_1,\cdots,B_{m-1}\in\Gamma^*$固定，记满足下述条件的集合$C\in\mathscr{B}$的全体为$\Gamma_1$：若$C\in\Gamma_1$，则

$$\mu(B_1),\cdots,\ \mu(B_{m-1}),\mu(C\setminus\bigcup_{j=1}^{m-1}B_j),$$

关于分布P相互独立。上面已经证明了$\Gamma_1\supset\Gamma^*$，又容易验证Γ_1是局部单调类，所以$\Gamma_1=\mathscr{B}$。这说明，对于任意的$B_1,\cdots,B_{m-1}\in\Gamma^*$以及任意的$C\in\mathscr{B}$，只要它们互不相交，则

$$\mu(B_1),\cdots,\mu(B_{m-1}),\mu(C),$$

关于分布P是相互独立的。重复上面的证法，可知对于任意互不相交的$C_1,\cdots,C_m\in\mathscr{B}$，$\{\mu(C_i);\ 1\leqslant i\leqslant m\}$关于分布$P$是相互独立的。证毕。

对于固定的$A\in\mathscr{A}$，$A\mu$表示测度$\mu(A\cup\cdot)$，下面的定理中，我们也用$A\mu$表示将μ变为$\mu(A\cap\cdot)$的映射，N中由这个映射产生的σ代数记为$_A\mathbf{N}$。

34. 定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则下列命题等价：

1）P是无后效的；

2）对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m$，$A_1\mu,\cdots,A_m\mu$关于分布P是相互独立的；

3）对任意的$A\in\mathscr{A}$，$A\mu$与$A^c\mu$关于P是相互独立的。

证明 1）$\Longrightarrow$2）我们必须证明，σ 代数 ${}_{A_1}\mathbf{N},\cdots,{}_{A_m}\mathbf{N}$关于$P$是相互独立的。

固定$i,1\leqslant i\leqslant m$，令

$$\mathbf{N}^{(i)}=\bigcup_{c_1,\cdots,c_k}\mathbf{N}c_1\cdots c_k,$$

这里$C_1,\cdots,C_h$取遍A_i中互不相交的 Borel 子集，则 $\mathbf{N}^{(i)}$是代数，并且$\sigma(\mathbf{N}^{(i)})={}_{A_i}\mathbf{N}$，（$1\leqslant i\leqslant m$）。于是我们只要证明$\mathbf{N}^{(1)},\cdots,\mathbf{N}^{(m)}$的相互独立性，但由于$P$的无后效性，这一点是显然的。

2）$\Longrightarrow$3），显然。

3）$\Longrightarrow$1） 设$A_1\cdots,A_m\in\mathscr{B}$互不相交，由假定知：$(A_1\mu)(A_1)=\mu(A_1)$与$\{\mu(A_2),\cdots,\mu(A_m)\}$关于分布$P$相互独立，即

$$P_{A_1},\ldots,{}_{A_m}=P_{A_1}\times P_{A_2},\ldots,{}_{A_m},$$

类似考虑$\{\mu(A_2),\cdots,\mu(A_m)\}$的分布$P_{A_2},\ldots,{}_{A_m}$，逐步可得

$$P_{A_1},\ldots,{}_{A_m}=P_{A_1}\times\cdots\times P_{A_m};$$

所以P是无后效分布。定理得证。

§7. Laplace 泛函

35. 定义 以$\mathscr{F}_{m+}$记定义于(X,ρ_X)上的全体有有界支承的$\mathscr{A}$可测非负有界函数，又设$P\in\mathscr{P}_M$。在$\mathscr{F}_{m+}$上定义泛函

$$\Psi_P(f)=\int e^{-\mu f}P(d\mu),\quad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

称为点分布P的Laplace 泛函，这里$\mu f=\int f(a)\mu(da)$。

如果$\xi=\xi(\omega,\cdot)$是点过程，其分布为$P\xi^{-1}$，则点过程ξ的Laplace 泛函就定义为它的的分布$P\xi^{-1}$的Laplace泛函，记作

$$\Psi_\xi(f)=\int e^{-\mu f}P\xi^{-1}(d\mu)=\int_\Omega e^{-\xi f}P(d\omega),$$

这里$\xi f=\int f(a)\xi(\omega,da)$。

类似定义随机测度的Laplace泛函。

36. 定理 为使$\mathscr{F}_{m+}$上定义的泛函$\Psi(\cdot)$是某个$P\in\mathscr{P}_N$的Laplace泛函，充分必要条件是：

1）对任意的正整数m，任意的$h_1,\cdots,h_m$，$0<h_i\leqslant1$，$(1\leqslant i\leqslant m)$以及任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，$\Psi(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i})$ 作为$(h_1,\cdots,h_m)$的函数是某个m维取非负整数值的随机向量的概率母函数；

2） 对于$\mathscr{F}_{m+}$中任意一列具有公共支承的一致有界函数$f_1,\cdots,f_n,\cdots$，如果$f_n\to$某个f，则$\Psi(f_n)\to\Psi(f)$。

证明 必要性 设$P\in\mathscr{P}_N$，$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，令

$$f=\sum_{i=1}^{m}1_{A_i}\log\frac{1}{h_i},\quad 0<h_i\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant m,$$

则$f\in\mathscr{F}_{m+}$，并且

$$\Psi_P(f)=\int e^{-\mu f}P(d\mu)=\int\Big(\prod_{i=1}^{m}h_i^{\mu(A_i)}\Big)P(d\mu)$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_m\in Z_+}P_{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m)h_1^{j_1}h_2^{j_2}\cdots h_m^{j_m},$$

右端是Z_+^m上的概率分布$P_{A_1,\cdots,A_m}$的概率母函数，1)得证，2)可应用控制收敛定理推出。

充分性 设定理条件满足，则对于任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，存在$Z_+^m$上的概率分布$P^{A_1,\cdots,A_m}$使得

$$\Psi\Big(\sum_{i=1}^{m}1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\Big)=\sum_{j_1,\cdots,j_m\in Z_+}P^{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m)h_1^{j_1}\cdots h_m^{j_m},\tag{1}$$

我们要证明如此给出的概率分布族

$$\{P^{A_1,\cdots,A_m}:\ m\geqslant 1,A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}\text{互不相交}\}\tag{2}$$

满足存在定理13的条件1)～4)。

事实上，定理13的条件1)显然被满足，在(1)中令$h_m=1$，则一方面

$$\Psi\Big(\sum_{i=1}^{m}1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\Big)=\sum_{j_1,\cdots,j_m\in Z_+}P^{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m)h_1^{j_1}\cdots h_{m-1}^{j_{m-1}},$$

另一方面

$$\Psi\Big(\sum_{i=1}^{m}1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\Big)=\Psi\Big(\sum_{i=1}^{m-1}1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\Big)$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_{m-1}\in Z_+}P^{A_1,\cdots,A_{m-1}}(j_1,\cdots,j_{m-1})h_1^{j_1}\cdots h_{m-1}^{j_{m-1}},$$

比较两边级数中$h_1^{j_1}\cdots h_{m-1}^{j_{m-1}}$的系数得

$$P^{A_1,\cdots,A_{m-1}}(j_1,\cdots,j_{m-1})=\sum_{j_m\in Z_+}P^{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m),$$

这便是定理13的条件2)。

对于条件3)，我们要证

$$P^{A_1,\cdots,A_{k-1},A}(j_1,\cdots,j_{k-1},l)=\sum_{j_k+\cdots+j_m=l}P^{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m),\tag{3}$$

其中 $A=\bigcup_{i=k}^{m}A_i$. $(1\leqslant k<m)$.在(1)中令 $h_k=h_{k+1}=\cdots=h_m=h$.则

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^{m}1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)=\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_{k-1}\in Z_+\\ j_k+\cdots+j_m\in Z_+}}P^{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m)\,h_1^{j_1}\cdots h_{k-1}^{j_{k-1}}\,h^{j_k+\cdots+j_m}.$$

另一方面

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^{k-1}1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}+1_A\log\frac{1}{h}\right)$$

$$=\sum_{j_1,\cdots,j_{k-1},l\in Z_+}P^{A_1,\cdots,A_{k-1},A}(j_1,\cdots,j_{k-1},l)\,h_1^{j_1}\cdots h_{k-1}^{j_{k-1}}h^l.$$

比较两级数中 $h_1^{j_1}\cdots h_{k-1}^{j_{k-1}}h^l$ 项的系数即得欲证之(3).

为证明存在定理13中的条件4)满足,取任意一串$A_n\in\mathscr{B}$, $A_n\downarrow\phi$,由本定理之条件2)可知$\Psi(1_{A_n}\log\frac{1}{h})\to\Psi(1_\phi\log\frac{1}{h})=\Psi(0)$, 凡$0<h\leqslant1$,这说明概率分布$P^{A_n}$弱收敛于$P^\phi$;

但由于分布 P^ϕ的概率母函数$\Psi(1_\phi\log\frac{1}{h})=\Psi(0)$是常数(即与$h$无关),故必有$P^\phi(0)=1$,于是$P^{A_n}(0)\to P^\phi(0)=1$,这便是欲证之条件4).

由于分布族$\{P^{A_1,\cdots,A_m}: m\geqslant1,\ A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不交$\}$满足存在定理13的条件,故存在$P\in\mathscr{P}_N$,使

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=P^{A_1,\cdots,A_m},\quad 凡A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}且互不相交.$$

以$\Psi_P(\cdot)$记P的Laplace泛函,则可知

$$\Psi_P\left(\sum_{i=1}^{m}t_i1_{A_i}\right)=\Psi\left(\sum_{i=1}^{m}t_i1_{A_i}\right),\ 0<t_i<\infty,\ 1\leqslant i\leqslant m;$$

由于$\mathscr{F}_{m+}$中任一f都可用具有公共支承的一致有界简单函数来逼近,故由上式推知对任意$f\in\mathscr{F}_{m+}$,都有

$$\Psi_P(f)=\Psi(f),$$

所以$\Psi(\cdot)$就是点分布P的Laplace泛函。证毕。

37. 引理 设$G_1,\cdots,G_m$及$O_1,\cdots,O_m$是(X,ρ_X)中任意两组有界开集,满足$O_j\subset G_j$, $1\leqslant j\leqslant m$.令

$$A=\bigcup_{j=1}^{m}(G_j\backslash O_j);$$

则$\mathscr{B}$中全体能表为如此形式的集合作成一个环Γ, 而且$\mathscr{B}=\Gamma_\sigma(\Gamma)$.

证明 由于Γ包含一切有界开集,故$\mathscr{B}=L_\sigma(\Gamma)$是明显的。又显然$\Gamma$对于有限并是封闭的,下面证明它对于差的运算也封闭。

设 $A=\bigcup_{j=1}^{m}(G_j^{(1)}\backslash O_j^{(1)})$, $B=\bigcup_{j=1}^{n}(G_j^{(2)}\backslash O_j^{(2)})$,由于

$$A\backslash B=\bigcup_{j=1}^{m}(G_j^{(1)}\backslash O_j^{(1)})\backslash(G_1^{(2)}\backslash O_1^{(2)})\backslash\cdots\backslash(G_n^{(2)}\backslash O_n^{(2)}).$$

故无妨设$n=1$而令

$$A=\bigcup_{j=1}^{m}(G_j\backslash O_j),\quad B=G_0\backslash O_0,\quad G_j\supset O_j,\quad 0\leqslant j\leqslant m.$$

这时

$$A\backslash B=\bigcup_{j=1}^{m}[(G_j\backslash O_j)\backslash(G_0\backslash O_0)]$$

$$=\bigcup_{j=1}^{m}\{[(G_j\cap O_0)\backslash(O_j\cap O_0)]\cup[G_j\backslash(O_j\cup(G_j\cap G_0))]\}.$$

由于$O_0\cap O_j\subset G_j\cap O_0$，$O_j\cup(G_j\cap G_0)\subset G_j$，所以$A\backslash B\in\Gamma$.证毕.

设$\mathscr{F}_+$是全体定义于(X,ρ_X)上的具有有界支承的有界、非负连续函数，则$\mathscr{F}_+\subset\mathscr{F}_{m+}$，$\mathscr{F}_+\subset\mathscr{F}$.下面的定理指出，对于$P\in\mathscr{P}_N$，它的Laplace泛函由$\mathscr{F}_+$中的函数唯一确定.

38. 定理 设$P,Q\in\mathscr{P}_N$，它们的Laplace泛函分别为Ψ_P和Ψ_Q.则$P=Q$的充分必要条件是：

$$\Psi_P(f)=\Psi_Q(f),\quad \text{凡}f\in\mathscr{F}_+.$$

证明 必要性是显然的。往证充分性。由推论5，我们只要证明：对任意不相交的$A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{B}$，有$P_{A_1,\cdots,A_k}=Q_{A_1,\cdots,A_k}$；而这等价于证明：对任意的非负实数$c_1,\cdots,c_k$有

$$\Psi_P\left(\sum_{i=1}^{k}c_i1_{A_i}\right)=\Psi_Q\left(\sum_{i=1}^{k}c_i1_{A_i}\right).\tag{1}$$

为此，设$f_2,\cdots,f_k\in\mathscr{F}_+$固定，令

$$\Gamma_1=\{A:\ A\in\mathscr{B},\ \Psi_P(c_11_A+c_2f_2+\cdots+c_kf_k)=\Psi_Q(c_11_A+c_2f_2+\cdots+c_kf_k)\}$$

容易看出Γ_1是局部单调类（这由定理36之2)推出）。此外，若设Γ是上面引理中所定义的环，则可证$\Gamma\subset\Gamma_1$.事实上，设$A\in\Gamma$可表为：

$$A=\bigcup_{j=1}^{m}(G_j\backslash O_j).\ G_j\supset O_j,\ G_j,O_j\text{为有界开集},\ 1\leqslant j\leqslant m,$$

按引理Ⅰ.19取$\mathscr{F}_+$中序列$(f_n^{(j)})$和$(g_n^{(j)})$，$1\leqslant j\leqslant m$，使

$$f_n^{(j)}\to 1_{G_j},\quad g_n^{(j)}\to 1_{O_j},\quad (n\to\infty);$$

令

$$h_{ln}=\max_{1\leqslant j\leqslant m}(f_n^{(j)}-f_n^{(j)}\wedge g_l^{(j)}),\quad (l,n=1,2,\cdots),$$

则$h_{ln}\in\mathscr{F}_+$，并且对一切l,n有

$$\Psi_P(c_1h_{ln}+c_2f_2+\cdots+c_kf_k)=\Psi_Q(c_1h_{ln}+c_2f_2+\cdots+c_kf_k)$$

在上式中先令$n\to\infty$，再令$l\to\infty$，由定理36之2)可得

$$\Psi_P(c_1 \max_{1<j<m}(1_{G_j}-1_{0_j})+c_2f_2+\cdots+c_kf_k)$$

$$=\Psi_Q(c_1 \max_{1<j<m}(1_{G_j}-1_{0_j})+c_2f_2+\cdots+c_kf_k),$$

而这就是

$$\Psi_P(c_1 1_A+c_2f_2+\cdots+c_kf_k)=\Psi_Q(c_1 1_A+c_2f_2+\cdots+c_kf_k) \tag{2}$$

所以$A\in\Gamma_1$，从而$\Gamma_1=L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$，这说明(2)式对一切$A\in\mathscr{B}$都成立。

固定$A_1\in\mathscr{B}$，令

$$\Gamma_2=\{A: A\in\mathscr{B},$$

$$\Psi_P(c_1 1_{A_1}+c_2 1_A+c_3f_3+\cdots+c_kf_k)=\Psi_Q(c_1 1_{A_1}+c_2 1_A+c_3f_3+\cdots+c_kf_k)\},$$

则Γ_2是局部单调类，类似上面的证法又可证明$\Gamma_2\supset\Gamma$，从而$\Gamma_2=\mathscr{B}$，于是证明了对任意$A_1,A_2\in\mathscr{B}$，有

$$\Psi_P(c_1 1_{A_1}+c_2 1_{A_2}+c_3f_3+\cdots+c_kf_k)=\Psi_Q(c_1 1_{A_1}+c_2 1_{A_2}+c_3f_3+\cdots+c_kf_k),$$

按上面的证法进行k次，可证(1)式成立。证毕。

下面我们再引入一种记号。设ξ和η是点过程，如果$P\xi^{-1}=P\eta^{-1}$，则记为$\xi\overset{d}{=}\eta$，表示ξ与η依分布相等。类似的记号对于随机变量和随机向量也适用。例如当ξ与η是点过程时，对于每个$f\in\mathscr{F}_+$，ξf和ηf都是随机变量，于是$\xi f\overset{d}{=}\eta f$表示它们的分布相同。

39．定理 设ξ和η是点过程，则下述命题等价：

1) $\xi\overset{d}{=}\eta$；

2) $\xi f\overset{d}{=}\eta f$，凡$f\in\mathscr{F}_+$，

3) $\Psi_\xi(f)=\Psi_\eta(f)$，凡$f\in\mathscr{F}_+$；

4) $(\xi(A_1),\cdots,\xi(A_n))\overset{d}{=}(\eta(A_1),\cdots,\eta(A_n))$，凡$A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{B}$；

证明 1)与4)等价根据引理4及其推论5；1)推出2)，2)推出3)显然的；而3)推出1)则是前面的定理。

§8 依分布收敛

40．由定义Ⅰ.13，若$(P_n)\subset\mathscr{P}_N$(或$\mathscr{P}_M$)，$P\in\mathscr{P}_N$(或$\mathscr{P}_M$)，则$P_n\overset{w}{\Longrightarrow}P$意味着

$$\lim_n\int g(\mu)P_n(d\mu)=\int g(\mu)P(d\mu),\quad g\in\mathscr{F}_b(N)\quad(\text{或}g\in\mathscr{F}_b(M)),$$

这里$\mathscr{F}_b(N)$(或$\mathscr{F}_b(M)$)表示(N,ρ_N)(或(N,ρ_M))上的全体有界连续函数。

现在设$\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是点过程（或随机测度），如果有

$$P\xi_n^{-1}\overset{w}{\Longrightarrow}P\xi^{-1},\quad(n\to\infty),$$

则称ξ_n依分布收敛于ξ，记为$\xi_n \overset{d}{\Longrightarrow} \xi$，所以，$\xi_n \overset{d}{\Longrightarrow} \xi$与$P\xi_n^{-1} \overset{w}{\Longrightarrow} P\xi^{-1}$是一回事。

本书主要讨论点过程，只是在完全类似的情形下我们也顺便讨论一下随机测度。本节仅仅讨论点过程的依分布收敛。首先讨论点分布族的相对紧性。

我们以$\mathscr{E}_+$记$(N,\mathbf{N})$上的全体有限测度。由于(N,ρ_N)是可分完备距离空间，由定理Ⅰ.17，可在$\mathscr{E}_+$上引入一个距离$\rho_{\mathscr{E}_+}$，使$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$是完备可分的。

设Δ是任意非空指标集，我们称$\{E_\delta: E_\delta \in \mathscr{E}_+, \delta \in \Delta\}$在距离空间$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中相对紧，如果它的闭包是紧集。下面的定理刻划了$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中的相对紧集。

41. 定理 集合$\{E_\delta: E_\delta \in \mathscr{E}_+, \delta \in \Delta\}$在$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中是相对紧的充分必要条件为：

1) $\sup\limits_{\delta\in\Delta} E_\delta(N) < \infty$.

2) 对(X,ρ_X)中的任意有界闭集A及$\varepsilon>0$，存在非负整数$n_{A,\varepsilon}$及紧集$A_\varepsilon \subset A$使

$$\sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu:\ \mu(A) \geqslant n_{A,\varepsilon}) < \varepsilon;$$

$$\sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu:\ \mu(A\backslash A_\varepsilon) \geqslant 1) < \varepsilon.$$

证明 由定理Ⅰ.18，$\{E_\delta: E_\delta \in \mathscr{E}_+, \delta \in \Delta\}$在$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中相对紧，当且仅当条件1)成立以及存在$(N,\rho_N)$中的紧集$Y_\varepsilon$使

$$\sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu \notin Y_\varepsilon) < \varepsilon.$$

先证必要性。假定Y_ε已如上选取，根据定理Ⅰ.24可知Y_ε满足以下条件：存在$M>0$使$\sup\limits_{\mu\in Y_\varepsilon} \mu(A) = M < \infty$；又对任意$\varepsilon'>0$，存在紧集$A_{\varepsilon'} \subset A$，使$\sup\limits_{\mu\in Y_\varepsilon} \mu(A - A_{\varepsilon'}) < \varepsilon'$。

所以若令$\varepsilon'<1$，$n_{A,\varepsilon} = M$，则$A_\varepsilon \subset A$是紧集且

$$(\mu:\ \mu(A) \geqslant n_{A,\varepsilon}) \subset Y_\varepsilon^c\ ;\quad \sup_{\mu\in Y_\varepsilon} \mu(A - A_\varepsilon) = 0$$

由此得

$$\sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu:\ \mu(A) \geqslant n_{A,\varepsilon}) \leqslant \sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu \in Y_\varepsilon^c) < \varepsilon;$$

$$\sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu:\ \mu(A\backslash A_\varepsilon) \geqslant 1) \leqslant \sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu \in Y_\varepsilon^c) < \varepsilon,$$

必要性得证。

充分性 假定$\{E_\delta: E_\delta \in \mathscr{E}_+, \delta \in \Delta\}$满足定理的条件。设$a_0 \in X$固定，令$A_m = \{a:\ \rho_X(a_0,a) \leqslant m\}$，又设$\varepsilon>0$给定。若对每个有界闭集$A_m$及$\varepsilon_m = \varepsilon/2^{m+1}$已取定了满足定理条件的$n_{A_m,\varepsilon_m}$，以及紧集$A_{\varepsilon_m} \subset A_m$令，

$$Y_\varepsilon = \{\mu:\ \mu(A_m) < n_{A_m,\varepsilon_m}\ ,\ \mu(A_m \backslash A_{\varepsilon_m}) = 0,\ m = 1,2,\cdots\},$$

则$Y_\varepsilon \in \mathbf{N}$，由定理Ⅰ.24它还是$(N,\rho_N)$中的相对紧集，而且

$$\sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(e\notin Y_\varepsilon)\leqslant\sup_{\delta\in\Delta} E_\delta(\mu\notin Y_\varepsilon)$$

$$\leqslant\sup_{\delta\in\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\left[E_\delta(\mu:\ \mu(A_m)\geqslant n_{A_m,\varepsilon_m})+E_\delta(\mu:\ \mu(A_m\setminus A_{\varepsilon_m})>0)\right]$$

$$\leqslant 2\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m=\varepsilon.$$

这说明$\{E_\delta:\ E_\delta\in\mathscr{E}_+,\delta\in\Delta\}$在$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中相对紧。

特别，当E_δ都是$(N,\mathbf{N})$上的概率测度时，上面定理中的条件1)总成立，于是有如下的推论。

42. 推论 设$\{P_\delta:\ \delta\in\Delta\}\subset\mathscr{P}_N$，它是相对紧的，当且仅当对任意有界闭集$A\subset X$及任意$\varepsilon>0$，存在非负整数$n_{A,\varepsilon}$及紧集$A_\varepsilon\subset A$使

$$\sup_{\delta\in\Delta} P_\delta(\mu:\ \mu(A)\geqslant n_{A,\varepsilon})<\varepsilon;$$

$$\sup_{\delta\in\Delta} P_\delta(\mu:\ \mu(A\setminus A_\varepsilon)\geqslant 1)<\varepsilon.$$

我们还注意到这样一个明显的事实：$\mathscr{P}_N$在$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中是闭集。这是因为如果$P_n\in\mathscr{P}_N$，$E\in\mathscr{E}_+$，则$\rho_{\mathscr{E}_+}(P_n,E)\to 0$可推出$E(N)=1$，即$E\in\mathscr{P}_N$。于是$\mathscr{P}_N$作为$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$的子空间，也是可分完备的。在这一节里我们将刻划$\mathscr{P}_N$中序列的弱收敛。

设$Y\in\mathbf{N}$，若$P(\partial Y)=0$，我们曾称之为P连续集，全部有界P连续集记为$\mathscr{B}_P$，或者为明白起见，记作$\mathscr{B}_P(N)$，表明它是N的子集类。如引理I.21所见，$\mathscr{B}_P(N)$是$\mathbf{N}$的子环。

43. 定义 对任意的$A\in\mathscr{A}$，记

$$\partial_A N=\{\mu:\ \mu(\partial A)=0,\ \mu\in N\}.$$

显然，$\mu\in\partial_A N$当且仅当A是μ连续集，即

$\mu\in\partial_A N$，当且仅当$A\in\mathscr{A}_\mu$。

现设$P\in\mathscr{P}_N$，如果对于$A\in\mathscr{A}$有

$$P(\partial_A N)=1,$$

则称A是P的完全连续集，P的全体完全连续集记为$\mathscr{A}_{CP}$；$\mathscr{A}_{CP}$中的全体有界集记作$\mathscr{B}_{CP}$。

下面是有关完全连续集的两个引理。

44. 引理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则$\mathscr{B}_{CP}$是环，而且对任意的$A\in\mathscr{A}$及任意的$\varepsilon>0$，在$\mathscr{A}_{CP}$中存在至多可数个直径小于ε的元覆盖A。

证明 如引理I.21所证，$\mathscr{B}_{CP}$是环。现在我们证明它还包含(X,ρ_X)的一个开集基。为此只要证明，对任意固定的$a_0\in X$及正数$r_0>0$，总存在正数$r<r_0$使

$$P(\mu:\mu(\partial S(a_0,r))>0)=0\quad\text{即 } S(a_0,r)\in\mathscr{B}_{CP},$$

这里$S(a_0,r)$是以a_0为中心，以r为半径的开球。

事实上，对任意$\varepsilon>0$，开区间$(0,r_0)$中最多只有有限个r使

$$P(\mu:\mu(\partial S(a_0,r))>\varepsilon)>\varepsilon$$

成立。不然的话，将存在$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$，$0<r_n<r_0$使

$$P(\mu: \mu(\partial S(a_0, r_n))>\varepsilon)>\varepsilon, \quad n=1,2,\cdots,$$

由于$\partial S(a_0, r_n)\subset\{a: \rho(a_0, a)=r_n\}\subset S(a_0, r_0)$，故由Fatou引理导出如下矛盾：

$$0<\varepsilon\leqslant\limsup_{n\to\infty} P(\mu: \mu(\partial S(a_0,r_n))>\varepsilon)$$

$$\leqslant P(\limsup_{n\to\infty}(\mu: \mu(\partial S(a_0, r_n))>\varepsilon))\leqslant P(\mu: \mu(S(a_0,r_0))=\infty)=0;$$

令$\varepsilon\downarrow 0$，则可知在开区间$(0, r_0)$中至多只有可列个r使

$$P(\mu, \mu(\partial S(a_0, r))>0)>0$$

成立，所以总有$r', 0<r'<r_0$使$S(a_0, r')\in\mathscr{B}_{CP}$。又由于$(X, \rho_X)$的可分性，知引理正确。证毕。

由这引理立即推出$\mathcal{L}_\sigma(\mathscr{B}_{CP})=\mathscr{B}$，这个事实今后将常用到。

45. 引理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则$A\in\mathscr{B}_{CP}$当且仅当对任意的$n=0,1,2,\cdots$有

$$Y_n=\{\mu: \mu(A)=n\}\in\mathscr{B}_P(N)。$$

证明 设$A\in\mathscr{B}_{CP}$，即$P(\mu: \mu(\partial A)>0)=0$，我们要证对任意的$n$有$\partial Y_n\subset(\mu: \mu(\partial A)>0)$从而推出$P(\partial Y_n)=0$，即$Y_n\in\mathscr{B}_P(N)$，事实上，如果$\mu\in\partial Y_n$但$\mu(\partial A)=0$，则取$Y_n$中一列$(\mu_k)$，使$\rho_N(\mu_k, \mu)\to 0$，由定理Ⅰ.22可得$\mu(A^0)\leqslant n\leqslant\mu(\bar{A})=\mu(A^0)+\mu(\partial A)=\mu(A^0)$，于是推出$\mu(A)=n$；另一方面，若在$Y_n^c$中取一串$(\lambda_k)$，使$\rho_N(\lambda_k,\mu)\to 0$，则$(\lambda_k)$中必存在子列$(\lambda_{k_m})$，使得或者$\lambda_{k_m}(A)<n$，或者$\lambda_{k_m}(A)>n,(m=1,2,\cdots)$，这时有

$$\mu(A^0)\leqslant\liminf_{m\to\infty}\lambda_{k_m}(A^0)\leqslant\liminf_{m\to\infty}\lambda_{k_m}(A)<n;$$

或者

$$\mu(\bar{A})\geqslant\limsup_{m\to\infty}\lambda_{k_m}(\bar{A})\geqslant\limsup_{m\to\infty}\lambda_{k_m}(A)>n;$$

由于$\mu(A)=n$，所以总有

$$\mu(\partial A)=\mu(\bar{A}\setminus\mathring{A})\geqslant\mu(A)-\mu(\mathring{A})>0;$$

或者 $$\mu(\partial A)=\mu(\bar{A}\setminus\mathring{A})\geqslant\mu(\bar{A})-\mu(A)>0,$$

这与$\mu(\partial A)=0$的假定矛盾。

现设对任意的n，有$P(\partial Y_n)=0$，即$Y_n\in\mathscr{B}_P(N)$，要证明$A\in\mathscr{B}_{CP}$，即$P(\mu: \mu(\partial A)>0)=0$。我们只要证明

$$(\mu: \mu(\partial A)>0)\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}\partial Y_n.$$

为证此，任取$\mu\in(\mu: \mu(\partial A)>0)$，将它分解为如下三个测度之和$\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$，这里$\mu_1, \mu_2, \mu_3$分别是$\mu$在集合$A$，$(\bar{A}\setminus A)$，$(A^c)^0$上的限制。显然有

$$X=A\cup(\bar{A}\setminus A)\cup(A^c)^0, \quad \mu_i\in N, (i=1,2,3).$$

现设$\mu(A)=n$，要证$\mu\in\partial Y_n$。实际上，如果这时$\mu(\bar{A}\setminus A)=k>0$，则存在$a_1,\cdots,a_k\in\bar{A}\setminus A$使

$$\mu_2=\sum_{i=1}^{k}\delta_{a_i}，这里诸a_i可能重复，$$

取A中k个点列$(a_i^{(m)})\subset A$，使

$$\lim_{m\to\infty} a_i^{(m)} = a_i, \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

令

$$\mu^{(m)} = \mu_1 + \mu_3 + \sum_{i=1}^{k} \delta_{a_i^{(m)}}, \quad (m=1,2,\cdots),$$

则$\mu^{(m)} \in Y_n^c$，并且$\mu^{(m)} \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$，于是$\mu \in \bar{Y}_n^c$；但因为$\mu(A)=n$，故又有$\mu \in Y_n \subset \bar{Y}_n$，所以$\mu \in \partial Y_n$。

如果$\mu(\bar{A}\backslash A)=k=0$，则在上面证明中将$\mu$分解为$\mu=\mu_1+\mu_3$，由于$\mu(\partial A)>0$，故存在$a \in \partial A$，使得$\mu(a)=$某个$k_0>0$；取序列$(a_m) \subset A^c$，$a_m \to a$ $(m\to\infty)$，令

$$\mu_m = \mu_1 + \mu_3 - \delta_a + \delta_{a_m}, (m=1,2,3,\cdots)$$

则 $\mu_m \in Y_n^c$，并且$\mu_m \overset{l}{\Longrightarrow} \mu (m\to\infty)$，于是$\mu \in \bar{Y}_n^c$。所以仍然有$\mu \in \partial Y_n$。证毕。

设ξ是点过程，以$\mathscr{B}_\xi(N)$记它的全体有界连续集，即$Y \in \mathscr{B}_\xi(N)$当且仅当$Y \in \mathbf{N}$，而且

$$P(\xi \in \partial Y) = P\xi^{-1}(\partial Y) = 0;$$

又以$\mathscr{B}_{c\xi}$记ξ的全体有界完全连续集，即$A \in \mathscr{B}_{c\xi}$当且仅当$A \in \mathscr{B}$，而且

$$P(\xi(\partial A) > 0) = P\xi^{-1}(\mu: \mu(\partial A) > 0) = 0.$$

下述定理只是定理Ⅰ.16在点过程情形的改写。

46. 定理 设$\xi, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$是点过程，则下列命题等价：

1) $\xi_n \overset{d}{\Longrightarrow} \xi$；

2) $\limsup_{n\to\infty} P(\xi_n \in U) \leqslant P(\xi \in U)$， 凡$(N, \rho_N)$中闭集$U$；

3) $\liminf_{n\to\infty} P(\xi_n \in V) \geqslant P(\xi \in V)$， 凡$(N, \rho_N)$中开集$V$；

4) $\lim_{n\to\infty} P(\xi_n \in Y) = P(\xi \in Y)$， 凡$Y \in \mathscr{B}_\xi(N)$。

但这个定理只是个一般的结果，对于点过程还应该有自己特殊的收敛定理。我们先从一些引理的叙述开始。

47. 引理 设(X_1, ρ_1)，(X_2, ρ_2)是两个可分完备距离空间，h是$(X_1, \mathscr{A}_1)$到$(X_2, \mathscr{A}_2)$的可测映射，以D_h记h的不连续点集。如果$(\mu_n) \subset M_b(X_1)$，$\mu \in M_b(X_1)$，而且$\mu(D_h)=0$，则由$\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} \mu$推出

$$\mu_n h^{-1} \overset{w}{\Longrightarrow} \mu h^{-1},$$

这里μh^{-1}是$(X_2, \mathscr{A}_2)$上的测度，定义为

$$\mu h^{-1}(A) = \mu(h^{-1}(A)), \qquad A \in \mathscr{A}_2.$$

证明 因为$\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} \mu$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n h^{-1}(X_2)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(X_1)=\mu(X_1)=\mu h^{-1}(X_2),$$

由定理Ⅰ.16，我们只须证明，当F是(X_2,ρ_2)中的闭集时，有

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n h^{-1}(F)\leqslant\mu h^{-1}(F).$$

实际上，设$x\in\overline{h^{-1}(F)}$，则存在$x_n\in h^{-1}(F)$使

$$\rho_1(x,x_n)\to 0\quad(n\to\infty),$$

如果x是h的连续点则$\rho_2(h(x),h(x_n))\to 0\ (n\to\infty)$，由于$F$是$X_2$中的闭集，所以有$h(x)\in F$，即$x\in h^{-1}(F)$；如果$x$是$h$的不连续点，则$x\in D_h$，所以总有

$$\overline{h^{-1}(F)}\subset D_h\cup h^{-1}(F),$$

注意到$\mu(D_h)=0$，由$\mu_n\overset{w}{\Longrightarrow}\mu$得

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n h^{-1}(F)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\mu_n(\overline{h^{-1}(F)})\leqslant\mu(\overline{h^{-1}(F)})$$

$$\leqslant\mu(D_h)+\mu(h^{-1}(F))=\mu h^{-1}(F).$$

48. 引理 设h是(X,ρ_X)上定义的有有界支承的有界可测函数，又设$(\mu_n)\subset M$，$\mu\in M$，$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$，如果$\mu(D_h)=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n h=\mu h,$$

这里$\mu h=\int h(a)\mu(da)$。

证明 由于h具有有界支承，所以集合

$$S_h=\overline{\{a:h(a)\neq 0\}}$$

是有界闭集。我们可以根据Urysohn引理取有有界支承的有界连续函数g，使g在S_h上恒为1．定义测度

$$\mu_n'(\cdot)=\int_{(\cdot)}g(a)\mu_n(da),\qquad \mu'(\cdot)=\int_{(\cdot)}g(a)\mu(da),$$

则μ_n'，μ'是X上的有限测度，并且由$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$推知$\mu_n'\overset{w}{\Longrightarrow}\mu'$。又因为$\mu(D_h)=0$可推出$\mu'(D_h)=0$，所以由前面的引理可知$\mu_n'h^{-1}\overset{w}{\Longrightarrow}\mu'h^{-1}$。

现设$|h|\leqslant M$，令

$$f(t)=\begin{cases}-M, & \text{当 } t\leqslant -M,\\ t, & \text{当 } -M\leqslant t\leqslant M,\\ M, & \text{当 } t\geqslant M,\end{cases}$$

则$f(t)$是(R,ρ_R)上的有界连续函数，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int f(t)\mu_n'h^{-1}(dt)=\int f(t)\mu'h^{-1}(dt),$$

用积分代换公式$t=h(a)$可得

$$\lim_{n\to\infty}\int h(a)\,\mu_n'(da)=\int h(a)\,\mu'(da),$$

但由 μ_n' 与 μ' 之定义可知

$$\int h(a)\mu_n'(da)=\int h(a)g(a)\mu_n(da)=\int h(a)\mu_n(da),$$

$$\int h(a)\mu'(da)=\int h(a)g(a)\mu(da)=\int h(a)\mu(da);$$

代入上式即得欲证之结果。

下设 $h_1,\cdots,h_m$ 是 (X,ρ_X) 上定义的有有界支承的有界可测函数，定义

$$\Pi_{h_1,\cdots,h_m}(\mu)=(\mu h_1,\cdots,\mu h_m),\ \mu\in M,$$

则 $\Pi_{h_1,\cdots,h_m}$ 是 (M,ρ_M) 到 (R^m,ρ_{R^m}) 的可测映射，我们以 $D_{\Pi_{h_1,\cdots,h_m}}$ 记这映射的不连续点集。

下述引理是前面引理的推论。

49．引理 在前述定义与记号之下有

$$D_{\Pi_{h_1,\cdots,h_m}}\subset\bigcup_{i=1}^m(\mu:\mu(D_{h_i})>0).$$

注意，此处 D_h 是 h 的不连续点集，属于 $\mathscr{B}$；而 $D_{\Pi_{h_1,\cdots,h_m}}$ 是 $\Pi_{h_1,\cdots,h_m}$ 的不连续点集，属于 **M**。

证明 如果 $\mu\notin(\mu:\mu(D_{h_i})>0)$，$1\leqslant i\leqslant m$，即 $\mu(D_{h_i})=0$，$1\leqslant i\leqslant m$，由引理48，对任意 $(\mu_n)\subset M$，当 $\rho_M(\mu_n,\mu)\to0$ 时必有 $\mu_n h_i\to\mu h_i$，$1\leqslant i\leqslant m$，从而 $\mu\notin D_{\Pi_{h_1,\cdots,h_m}}$。

50．引理 设 $P\in\mathscr{P}_N$，F 是 X 中的有界闭集，G 是 X 中的有界开集且 $G\supset F$，则存在 $A\in\mathscr{B}_{CP}$，使

$$F\subset A\subset G.$$

证明 根据 Urysohn 引理取 $f\in\mathscr{T}$ 使

$$1_F\leqslant f\leqslant 1_G,$$

则 $\{f^{-1}(a)\}$，$a\in(0,1)$ 是 X 中一族互不相交的有界 Borel 集。类似引理31的证明可知集合

$$\{a:\ a\in(0,1),\ P(\mu:\ \mu(f^{-1}(a))>0)>0\}$$

至多是可数集。任取 $a_0\in(0,1)$ 使 $P(\mu:\ \mu(f^{-1}(a_0))>0)=0$，并取 $A=f^{-1}((a_0,\infty))$ 则 A 是 X 中的开集，且

$$\partial A=\bar{A}\setminus A\subset f^{-1}([a_0,\infty))\setminus f^{-1}((a_0,\infty))=f^{-1}(a_0),$$

所以 $P(\mu:\mu(\partial A)>0)=0$ 即 $A\in\mathscr{B}_{CP}$，而且显然有

$$F\subset A\subset G.$$

51．引理 设 λ，μ 是任意可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的有限测度，$g(\omega)$ 是有界可测函数，$|g(\omega)|\leqslant C$，则对任意 $A\in\mathscr{F}$ 有

$$\left|\int_A g(\omega)\lambda(d\omega)-\int_A g(\omega)\mu(d\omega)\right|$$

$$\leqslant\lambda(A)\sup_{\omega,\omega'\in A}|g(\omega)-g(\omega')|+C|\lambda(A)-\mu(A)|.$$

证明 当 $\lambda(A)$ 和 $\mu(A)$ 中有一为0时结论显然。设 $\lambda(A)>0$，$\mu(A)>0$，则有

$$\left|\int_A g(\omega)\lambda(d\omega)-\int_A g(\omega')\mu(d\omega')\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\mu(A)}\left|\int_A\int_A(g(\omega)-g(\omega'))\lambda(d\omega)\mu(d\omega')\right|$$

$$+\left|\frac{1}{\mu(A)}-\frac{1}{\lambda(A)}\right|\left|\int_A\int_A|g(\omega')|\lambda(d\omega)\mu(d\omega')\right|$$

$$\leqslant\lambda(A)\sup_{\omega,\omega'\in A}|g(\omega)-g(\omega')|+C|\lambda(A)-\mu(A)|.$$

下面是本节的主要结果。

52. 定理 设 $P\in\mathscr{P}_N$，$(P_n)\subset\mathscr{P}_N$，则下述命题等价：

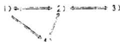
1） $P_n\overset{w}{\Longrightarrow}P$；

2） $P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}\overset{w}{\Longrightarrow}P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}$，　　凡 $h_1,\cdots,h_m\in\mathscr{F}_+$；

3） $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_{P_n}(f)=\Psi_P(f)$，　　凡 $f\in\mathscr{F}_+$；

4） $(P_n)_{A_1,\cdots,A_m}\overset{w}{\Longrightarrow}P_{A_1,\cdots,A_m}$　　凡 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CP}$.

证明 我们按下图的步骤来证明本定理：



1)$\Longrightarrow$2)。由于 h_i，$1\leqslant i\leqslant m$ 都是连续的，故由引理49，$D_{\Pi_{h_1,\cdots,h_m}}$ 是空集，从而在引理47中取 (X_1,ρ_1) 为 (N,ρ_N)，(X_2,ρ_2) 为 (R^m,ρ_{R^m}) 则得2)。

2)$\Longrightarrow$3)。在2)中取 $m=1$，$h_1=f\in\mathscr{F}_+$，则 $P_n\Pi_f^{-1}\overset{w}{\Longrightarrow}P\Pi_f^{-1}$，于是对 (R,ρ_R) 上的有界连续函数 $\varphi(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi(t)P_n\Pi_f^{-1}(dt)=\int\varphi(t)P\Pi_f^{-1}(dt),$$

特别取

$$\varphi(t)=\begin{cases}e^{-t}, & 当\ t\geqslant0,\\ 1, & 当\ t<0,\end{cases}$$

由积分变换公式及 Laplace 泛函的定义即得3)。

3)$\Longrightarrow$2)。利用下面熟知的关于 Laplace 变换的结果：如果 F_n，$F(n=1,2,\cdots)$

是 R_+^m 上的概率分布，则 $F_n \stackrel{w}{\Longrightarrow} F$ 的充分必要条件为，对任意 $t_1, \cdots, t_m \geqslant 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_+^m} e^{-(x_1t_1+\cdots+x_mt_m)} F_n(dx_1,\cdots,dx_m)$$

$$=\int_{R_+^m} e^{-(x_1t_1+\cdots+x_mt_m)} F(dx_1,\cdots,dx_m).$$

当3)成立时，对给定的 $h_1,\cdots,h_m \in \mathscr{F}_+$，令

$$h = t_1h_1+\cdots+t_mh_m,\quad t_1,\cdots,t_m \in R_+^m,$$

则 $h\in\mathscr{F}_+$，由3)知

$$\lim_{n\to\infty}\int e^{-\mu(t_1h_1+\cdots+t_mh_m)} P_n(d\mu) = \lim_{n\to\infty}\int e^{-\mu h} P_n(d\mu)$$

$$=\int e^{-\mu h} P(d\mu) = \int e^{-\mu(t_1h_1+\cdots+t_mh_m)} P(d\mu),$$

在上式两端进行积分代换即见

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R_+^m} e^{-(t_1x_1+\cdots+t_mx_m)} P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx_1,\cdots,dx_m) =$$

$$=\int_{R_+^m} e^{-(t_1x_1+\cdots+t_mx_m)} P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx_1,\cdots,dx_m)$$

所以 $P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m} \stackrel{w}{\Longrightarrow} P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}$.

2)$\Longrightarrow$1). 设$h_1,\cdots,h_m \in \mathscr{F}_+$，如果$G$是$(R^m, \rho_{R^m})$中的开集且满足$P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(\partial G)=0$，则由于映射

$$\mu \frown (\mu h_1,\cdots,\ \mu h_m)$$

是连续映射（引理48），所以

$$Y = \Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(G)$$

是$(\bar{N}, \rho_N)$中的开集而且是P连续集。

当$m, h_1,\cdots,h_m$，以及G变动时，所得到的全体P连续开集Y记为Γ。

由于(N, ρ_N)中的拓扑是使全体映射

$$\mu\frown\mu f,\quad f\in\mathscr{F},$$

都为连续的最粗拓扑，所以它当然也是使映射

$$\mu\frown\mu f,\ f\in\mathscr{F}_+,$$

都为连续的最粗拓扑，从而Γ包含$(\bar{N}, \rho_N)$的一个开集基，无妨设$\Gamma_1\subset\Gamma$是一可数基。

现证Γ对有限交运算封闭。设$Y_1, Y_2\in\Gamma$，于是存在$h_1\cdots,h_m, g_1,\cdots,g_k\in\mathscr{F}_+$以及$m$维开集$G_1$和$k$维开集$G_2$使

$$Y_1 = \Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(G_1),\qquad Y_2 = \Pi^{-1}_{g_1,\cdots,g_k}(G_2),$$

令$G=\{(a_1,\cdots,a_{m+k})\in R^{m+k}:(a_1,\cdots,a_m)\in G_1,\ (a_{m+1},\cdots,a_{m+k})\in G_2\}$，则

$$Y_1\cap Y_2=\Pi^{-1}_{h_1\cdots,h_m,g_1,\cdots g_k}(G),$$

又因为

$$\partial(G)=\partial(G_1\times G_2)=(\partial G_1\times\bar{G}_2)\cup(\bar{G}_1\times\partial G_2),$$

故由关系式

$$\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m,g_1,\cdots,g_k}(\partial G)\subset\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(\partial G_1)\cup\Pi^{-1}_{g_1,\cdots,g_k}(\partial G_2)$$

知$Y_1\cap Y_2\in\Gamma$，这就证明了Γ对有限交封闭。

今设$Y_1,\cdots,Y_m\in\Gamma$，则由关系式

$$\lim_{n\to\infty}P_n(Y)=P(Y),\quad \text{凡}Y\in\Gamma,\ (\text{由于}2)),$$

$$P_n(\bigcup_{i=1}^m Y_i)=\sum_{1\le i\le m}P_n(Y_i)-\sum_{1\le i<j\le m}P_n(Y_i\cap Y_j)+\cdots+$$

$$+(-1)^{m-1}P_n(\bigcap_{i=1}^m Y_i),$$

可知

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\bigcup_{i=1}^m Y_i)=P(\bigcup_{i=1}^m Y_i).$$

现设Y是(N,ρ_N)中的任意开集，要证

$$P(Y)\leqslant\liminf_{n\to\infty}P_n(Y),$$

从而推出$P_n\overset{w}{\Longrightarrow}P$。由于$\Gamma_1\subset\Gamma$是可数基，所以$Y$可表为$Y=\bigcup_{i=1}^{\infty}Y_i$，$Y_i\in\Gamma_1$，于是由已证事实得

$$P(Y)=\lim_{s\to\infty}P(\bigcup_{i=1}^s Y_i)=\lim_{s\to\infty}\lim_{n\to\infty}P_n(\bigcup_{i=1}^s Y_i)$$

$$\leqslant\lim_{s\to\infty}\liminf_{n\to\infty}P_n(Y)=\liminf_{n\to\infty}P_n(Y).$$

1)$\Longrightarrow$4)。设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CP}$。令

$$h_i=1_{A_i},\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

则 $h_i\in\mathscr{F}_{m+}$，$1\leqslant i\leqslant m$，并且

$$D_{\Pi h_1,\cdots,h_m}=\bigcup_{i=1}^m D_{\Pi h_i}\subset\bigcup_{i=1}^m(\mu:\mu(\partial A_i)>0).$$

但由于$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CP}$，故

$$P(D_{\Pi h_1,\cdots,h_m})\leqslant\sum_{i=1}^m P(\mu:\mu(\partial A_i)>0)=0,$$

从而由引理47知

$$P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m} \overset{w}{\Longrightarrow} P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m},$$

而这就是

$$(P_n)_{A_1,\cdots,A_m} \overset{w}{\Longrightarrow} P_{A_1,\cdots,A_m}.$$

4)$\Longrightarrow$2)。设 $h_1,\cdots,h_m\in\mathscr{F}_+$，我们首先选取$A\in\mathscr{B}_{CP}$使$\{a: a\in X, \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} h_i(a)>0\}$的闭包$\subset A$，由引理50这样的$A$必存在，因左边的集合是有界闭集。

设$\delta>0$，对一切(i,k)，$i=1,2,\cdots,m$，$k=1,2,\cdots$，再由引理50，存在 $A_{ik}\in\mathscr{B}_{CP}$使

$$h_i^{-1}\left(\left[\frac{k\delta}{2}, \frac{(k+1)\delta}{2}\right]\right)\subset A_{ik}\subset h_i^{-1}\left(\left(\frac{k\delta}{2}-\frac{\delta}{4}, \frac{(k+1)\delta}{2}+\frac{\delta}{4}\right)\right),$$

由于h_i有界，对固定的i，(A_{ik})中只有有限个非空，因此在序列

$$(A_{ik}: i=1,2,\cdots,m, k=1,2,\cdots)$$

中只有有限个非空，将它们记为$B_1,B_2,\cdots,B_{s-1}$，令

$$A_1=B_1, A_2=B_2\backslash B_1,\cdots,A_{s-1}=B_{s-1}\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{s-2}B_j\right),\ A_s=A\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{s-1}A_j\right),$$

由于$\mathscr{B}_{CP}$是环，故$A_1,\cdots,A_s\in\mathscr{B}_{CP}$。于是我们证明了，对于所选取的$A$以及任意的$\delta>0$，总存在$\mathscr{B}_{CP}$中互不相交的$A_1,\cdots,A_s$使

(1) $A=\bigcup\limits_{j=1}^{s}A_j$；

(2) 对于$i=1,2,\cdots m$及$j=1,2,\cdots,\cdots,s$，

$$\sup_{a,a'\in A_j}|h_i(a)-h_i(a')|\leqslant\delta.$$

现设$g(x)=g(x_1,\cdots,x_m)$是R^m上的有界连续函数，为证明定理之2)，我们必须证明

$$\lim_{n\to\infty}\int g(x)P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx)=\int g(x)P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx).$$

令

$$\|g\|=\sup_{x\in R^m}|g(x)|,\ \|h_i\|=\sup_{a\in X}h_i(a),\ (1\leqslant i\leqslant m).$$

于是对任意自然数k，有

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int g(x)P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx)-\int g(x)P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx)\right|$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\left|\int g(\mu h_1,\cdots,\mu h_m)P_n(d\mu)-\int g(\mu h_1,\cdots,\mu h_m)P(d\mu)\right|$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{(\mu(A)\leqslant k)}g(\mu h_1,\cdots,\mu h_m)P_n(d\mu)-\int_{(\mu(A)\leqslant k)}g(\mu h_1,\cdots,\mu h_m)P(d\mu)\right|$$

$$+\limsup_{n\to\infty}\|g\|(P_n(\mu:\mu(A)>k)+P(\mu:\mu(A)>k))=I_1+I_2.$$

下面分别估计I_1与I_2。对于I_1我们应用引理51得

$$I_1 = \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_s<k} \Bigg| \int_{(\mu(A_j)=k_j,\ 1\le j\le s)} g(\mu h_1,\cdots,\mu h_m) P_n(d,u)$$

$$- \int_{(\mu(A_j)=k_j,\ 1\le j\le s)} g(\mu h_1,\cdots,\mu h_m)\ P(d\mu) \Bigg|$$

$$\leqslant \sup_{\left(\substack{(\mu,\mu'):\mu(Aj)=\mu'(Aj)\\ \mu(A)=\mu'(A)<k,\ 1\le j\le s}\right)} \Big| g(\mu h_1,\cdots,\mu h_m) - g(\mu' h_1,\cdots,\mu' h_m) \Big|$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \|g\| \cdot \sum_{k_1+\cdots+k_s<k} \Big| (P_n)_{A_1,\cdots,A_s}(k_1,\cdots,k_s)$$

$$- P_{A_1,\cdots,A_s}(k_1,\cdots,k_s) \Big|,$$

但当$\mu(Aj)=\mu'(Aj)$，$1\leqslant j\leqslant s$时总有（由引理51）

$$\left| \mu h_i - \mu' h_i \right| = \left| \int h_i(a)\mu(da) - \int h_i(a)\mu'(da) \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{s} \left| \int_{A_j} h_i(a)\mu(da) - \int_{A_j} h_i(a)\mu'(da) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{s} \delta\mu(Aj) = \delta\mu(A),$$

于是我们得

$$I_1 \leqslant \sup_{\substack{|x_i - x_i'| < k\delta \\ 0 < x_i, x_i' < k\|h_i\| \\ 1\le i\le m}} \left| g(x_1,\cdots,x_m) - g(x_1',\cdots,x_m') \right|$$

$$+ \varlimsup_{n\to\infty} \|g\| \cdot \sum_{k_1+\cdots+k_s<k} \left| (P_n)_{A_1,\cdots,A_s}(k_1,\cdots,k_s) - P_{A_1,\cdots,A_s}(k_1,\cdots,k_s) \right|,$$

上式右边第一项，由于g在R^m的有界闭区域内一致连续，故当$\delta\to 0$时它趋于0；而第二项，由定理条件4)，当n趋于∞时

$$(P_n)_{A_1,\cdots,A_s}(k_1,\cdots,k_s) \to P_{A_1,\cdots,A_s}(k_1,\cdots,k_s),$$

所以第二项为0，于是$I_1 = 0$。

现在估计I_2。由定理条件4)，$(P_n)_A$及P_A作为Z_+上的概率测度满足$(P_n)_A \xrightarrow{w} P_A$，所以由定理Ⅰ.18，存在自然数$k_0$使

$$P(\mu:\ \mu(A) > k_0) < \frac{\varepsilon}{2(1+\|g\|)},$$

$$\sup_n P_n(\mu:\ \mu(A) > k_0) < \frac{\varepsilon}{2(1+\|g\|)}$$

这里$\varepsilon > 0$是预先给定的正数。于是当k充分大时，

$$I_2 = \varlimsup_{n\to\infty} \|g\| (P_n(\mu:\ \mu(A) > k) + P(\mu:\ \mu(A) > k)) < \varepsilon\ .$$

所以最后有

$$0\leqslant\limsup_{n\to\infty}\left|\int g(x)P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx)-\int g(x)P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx)\right|\leqslant I_1+I_2<\varepsilon,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int g(x)P_n\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx)=\int g(x)P\Pi^{-1}_{h_1,\cdots,h_m}(dx),$$

定理至此全部证毕。

上述定理可作如下改写。

53. 定理 设$\xi,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\cdots$是点过程，则下列命题等价：

1) $\xi_n\overset{d}{\Longrightarrow}\xi$；

2) $(\xi_nh_1,\cdots,\xi_nh_m)\overset{d}{\Longrightarrow}(\xi h_1,\cdots,\xi h_m)$，　凡 $h_1,\cdots,h_m\in\mathscr{F}_+$；

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi_{\xi_n}(h)=\Psi_\xi(h)$，　凡$h\in\mathscr{F}_+$；

4) $(\xi_n(A_1),\cdots,\xi_n(A_m))\overset{d}{\Longrightarrow}(\xi(A_1),\cdots,\xi(A_m))$，　凡$A_1\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{c\xi}$。

§9. 卷　积

54. 定义 易知，映射

$\varphi:(\mu,\lambda)\frown\mu+\lambda$，　$\mu,\lambda\in N$，

是$(N,\mathbf{N})\times(N,\mathbf{N})$到$(N,\mathbf{N})$的可测映射。

如果$E_1,E_2\in\mathscr{E}_+$，以$E_1\times E_2$记它们的乘积，则称$E_1\times E_2$在上述映射之下所诱导出来的测度为E_1与E_2的卷积，记为E_1*E_2，于是

$$(E_1*E_2)(Y)=(E_1\times E_2)(\varphi^{-1}(Y)),\quad Y\in\mathbf{N}.$$

同样，当$E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{E}_+$时，定义它们的卷积$E_1*E_2*\cdots*E_n$如下：

$$(E_1*E_2*\cdots*E_n)(Y)$$
$$=(E_1\times E_2\times\cdots\times E_n)((\mu_1,\cdots,\mu_n):\mu_1+\cdots+\mu_n\in Y),\quad Y\in\mathbf{N}.$$

由卷积的定义，下列各式成立：

$$(c_1E_1+c_2E_2)*E_3=c_1(E_1*E_3)+c_2(E_2*E_3);$$
$$(E_1*E_2)*E_3=E_1*(E_2*E_3);\quad E_1*E_2=E_2*E_1,$$

其中$E_1,E_2,E_3\in\mathscr{E}_+,c_1,c_2$是非负实数。特别，我们令

$$E^n=\underbrace{E*\cdots*E}_{n\text{次}},\quad E\in\mathscr{E}_+,$$

称为E的n次卷积，当$n=0$时，定义$E^0=\delta_0$。

在卷积运算之下，$\mathscr{P}_N$是封闭的，即当$P_1,P_2\in\mathscr{P}_N$时，$P_1*P_2\in\mathscr{P}_N$。

但是两个简单点分布的卷积，已不一定是简单的了，例如任取$a\in X$，设E是集中于δ_a的简单点分布，即$E(\delta_a)=1$，则E^2是集中于$2\delta_a$的分布，$E^2(2\delta_a)=1$，它不是简单的。

55. 定理 设$P,Q\in\mathscr{P}_N$，则$P*Q$是简单的当且仅当：

1) P与Q都是简单的；

2) 下式成立

$\{a: a\in X, P(\mu:\ \mu(a)>0)>0\}\cap\{a:\ a\in X, Q(\mu:\mu(a)>0)>0\}=\phi$.

证明 *必要性* 由定义

$$(P*Q)(N_s)=(P\times Q)(\mu+\lambda\in N_s)=\int 1_{N_s}(\mu+\lambda)P\times Q(d\mu\times d\lambda)$$

$$\leqslant\iint 1_{N_s}(\mu)1_{N_s}(\lambda)P(d\mu)Q(d\lambda)=P(N_s)Q(N_s),$$

所以如果$(P*Q)(N_s)=1$，则$P(N_s)=Q(N_s)=1$，而对固定的$a\in X$有，

$$P(\mu:\ \mu(a)>0)Q(\mu:\ \mu(a)>0)=(P\times Q)((\mu:\ \mu(a)>0)\times(\mu:\ \mu(a)>0))$$
$$\leqslant(P*Q)(\mu:\ \mu(a)\geqslant 2)=0,$$

这表示或者$P(\mu:\ \mu(a)>0)=0$，或者$Q(\mu:\ \mu(a)>0)=0$，于是条件1)和2)成立。

充分性 设条件1)和2)成立。由于$\{a: a\in X, P(\mu:\mu(a)>0)>0\}$至多可数，设为$\{a_1, a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，又由于$Q$的简单性及条件2)得

$$Q(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda:\ \lambda(a_n)>0))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}Q(\lambda:\ \lambda(a_n)>0)=0,$$

于是$Q(N_s\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda:\ \lambda(a_n)>0))=1$，而且对任意固定的$\lambda\in N_s\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda:\ \lambda(a_n)>0)$，例如说

$\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{b_n}$，有

$$(\mu:\ \mu\in N_s, \mu+\lambda\notin N_s)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mu:\mu(b_n)>0),$$

注意到$b_n\neq$任一a_n，故

$$P(\mu:\mu\in N_s, \mu+\lambda\notin N_s)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(\mu:\mu(b_n)>0)=0,$$

于是

$$(P*Q)(N_s)=\int 1_{N_s}(\mu+\lambda)(P\times Q)(d\mu\times d\lambda)$$
$$=\int_{N_s\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda:\lambda(a_n)>0)}P(\mu:\mu+\lambda\in N_s)Q(d\lambda)=1,$$

这说明$P*Q$是简单点分布。

56. 对于$P\in\mathscr{P}_N$，在§7中定义了P的Laplace 泛函，这个定义可以推广到$\mathscr{E}_+$上去，即对$E\in\mathscr{E}_+$，定义

$$\Psi_E(f)=\int_N e^{-\mu f}E(d\mu),\quad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

并称$\Psi_E(\cdot)$为E的 Laplace 泛函。

§7中的结果，经过适当的修改，对$E\epsilon\mathscr{E}_+$的Laplace泛函也成立。例如当$E_1,E_2\epsilon\mathscr{E}_+$时，

$$\Psi_{E_1*E_2}(f)=\Psi_{E_1}(f)\Psi_{E_2}(f),\quad f\epsilon\mathscr{F}_{m+}, \tag{1}$$

又$E_1=E_2$，当且仅当

$$\Psi_{E_1}(f)=\Psi_{E_2}(f),\quad \text{凡}f\epsilon\mathscr{F}_+. \tag{2}$$

特别对于$E\epsilon\mathscr{E}_+$的n次卷积，有

$$\Psi_{E^n}(f)=(\Psi_E(f))^n,\quad f\epsilon\mathscr{F}_{m+}. \tag{3}$$

如果$E_1,E_2\epsilon\mathscr{E}_+$并且$E_1=E_2^n$,则我们称$E_2$是$E_1$的$n$次卷积根。

57. 定理 设$E\epsilon\mathscr{E}_+$, $n>0$,则E的n次卷积根如果存在，则必唯一。

证明 假定$E_1\epsilon\mathscr{E}_+$, $E_1^n=E$，则

$$\Psi_{E_1}(f)=(\Psi_E(f))^{\frac{1}{n}},\quad f\epsilon\mathscr{F}_+,$$

由于$\Psi_E(f)$的全部n次方根可表为

$$|\Psi_E(f)|^{\frac{1}{n}}\exp\left(\frac{2k\pi}{n}i\right),\quad 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

上述各根中，仅当$k=0$时为非负实数；又因$\Psi_{E_1}(f)\geqslant 0$ 所以$\Psi_{E_1}(f)=|\Psi_E(f)|^{\frac{1}{n}}$，凡$f\epsilon\mathscr{F}_+$,由前段的(2)得到$E_1$的唯一性。证毕。

58. 定义 设$E\epsilon\mathscr{E}_+$,令

$$(\exp E)(\cdot)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}E^k(\cdot),$$

则$\exp E$是$(N,\mathbf{N})$上的测度。由于

$$(\exp E)(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}E^k(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(E(N))^k=\exp(E(N))<\infty,$$

故$\exp E\epsilon\mathscr{E}_+$.容易算出它的Laplace泛函为：

$$\Psi_{\exp E}(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\Psi_E(f))^k=\exp(\Psi_E(f)),\quad f\epsilon\mathscr{F}_{m+}.$$

59. 定理 映射

$$E\frown\exp E$$

是$\mathscr{E}_+$到$\mathscr{E}_+$内的一一映射。

证明 设$E_1,E_2\epsilon\mathscr{E}_+$,并且$\exp E_1=\exp E_2$,要证明$E_1=E_2$.实际上，由前述知

$$\exp(\Psi_{E_1}(f))=\Psi_{\exp E_1}(f)=\Psi_{\exp E_2}(f)=\exp(\Psi_{E_2}(f)),\quad \text{凡}f\epsilon\mathscr{F}_+,$$

所以$\Psi_{E_1}(f)=\Psi_{E_2}(f)$,凡$f\epsilon\mathscr{F}_+$,从而$E_1=E_2$.

容易由计算得出

$$\exp(E_1+E_2)=(\exp E_1)*(\exp E_2),$$

事实上

$$\exp(E_1+E_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(E_1+E_2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}E_1^l*E_2^{k-l}$$

$$=(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}E_1^l)*(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l_2!}E_2^l)=(\exp E_1)*(\exp E_2).$$

§10. $\mathscr{U}_E$ 型分布

60. 定义 设$E\in\mathscr{E}_+$，令

$$\mathscr{U}_E=e^{-E(N)}\exp E,$$

则$\mathscr{U}_E$是$(N,\mathbf{N})$上的测度，并且因为$\mathscr{U}_E(N)=1$，所以$\mathscr{U}_E\in\mathscr{P}_N$，称如此定义的点分布为$\mathscr{U}_E$型分布。

由上面所述，当$E_1,E_2\in\mathscr{E}_+$时，

$$\mathscr{U}_{E_1+E_2}=\mathscr{U}_{E_1}*\mathscr{U}_{E_2}.$$

$\mathscr{U}_E$分布的Laplace泛函为：

$$\Psi_{\mathscr{U}_E}(f)=\int e^{-\mu f}\mathscr{U}_E(d\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-E(N)}\int e^{-\mu f}E^n(d\mu)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-E(N)}\int e^{-(\mu_1 f+\cdots+\mu_n f)}(E\times\cdots\times E)(d\mu_1\times\cdots\times d\mu_n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-E(N)}(\int e^{-\mu f}E(d\mu))^n=e^{-E(N)}\cdot\exp(\int e^{-\mu f}E(d\mu))$$

$$=\exp(-\int(1-e^{-\mu f})E(d\mu)).$$

所以

$$-\log\Psi_{\mathscr{U}_E}(f)=\int(1-e^{-\mu f})E(d\mu),\quad f\in\mathscr{F}_{m+}.$$

与$P\in\mathscr{P}_N$一样，对于$E\in\mathscr{E}_+$，分别以${}_AE$和$E_{A_1,\cdots,A_m}$记E在映射$\mu\frown A\mu$和映射$\mu\frown(\mu(A_1),\cdots,\mu(A_m))$之下所诱导出的测度。于是${}_AE(A\in\mathscr{B})$是$(N,\mathbf{N})$上的测度，满足

$${}_AE(Y)=E(\mu:\ A\mu\in Y),\quad Y\in\mathbf{N};$$

而$E_{A_1,\cdots,A_m}$是Z_+^m上的测度，满足

$$E_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)=E(\mu:\ \mu(A_1)=l_1,\cdots,\mu(A_m)=l_m),$$

这里$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B},l_1,\cdots,l_m\in Z_+$。当$m,A_1,\cdots,A_m$变动时，称测度族$\{E_{A_1,\cdots,A_m}:\ m\geqslant1,$

$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}\}$为$E$的有限维分布族。

容易由计算得出，对$A\in\mathscr{B}$，$E\in\mathscr{E}_+$，有

$$_A(\exp E)=\exp(_AE),$$

而对任意的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，有

$$(\exp E)_{A_1,\cdots,A_m}=\exp(E_{A_1,\cdots,A_m}).$$

$\mathscr{U}_E$型分布具有下列性质。

61. 定理 设$E\in\mathscr{E}_+$，$A,A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，则

1) $\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_{E((\cdot)\setminus\{0\})}$；

2) $_A(\mathscr{U}_E)=\mathscr{U}_{_AE}=\mathscr{U}_{(_AE)((\cdot)\setminus\{0\})}$，这里$\{0\}$表示$\{\mu:\mu(A)=0\}$；

3) $(\mathscr{U}_E)_{A_1,\cdots,A_m}=\mathscr{U}_{E_{A_1,\cdots,A_m}}=\mathscr{U}_{(E_{A_1},\cdots,_{A_m})((\cdot)\setminus\{0\})}$；

4) $\mathscr{U}_E(\mu:\ \mu(A)=0)=e^{-E(\mu:\mu(A)>0)}$；

6) $\mathscr{U}_E(\mu:\ \mu(A_1)=0|\mu(A_2)=0)=\exp(-E(\mu:\ \mu(A_1)>0,\mu(A_2)=0))$.

证明 1) 由定义，对任意的$c\geqslant0$，

$$\mathscr{U}_{c\delta_0}=e^{-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(c\delta_0)^k=e^{-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\delta_0^k=\delta_0,$$

所以

$$\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_{E((\cdot)\setminus\{0\})+E(\{0\})\delta_0}=\mathscr{U}_{E((\cdot)\setminus\{0\})}*\mathscr{U}_{E(\{0\})\delta_0}$$
$$=\mathscr{U}_{E((\cdot)\setminus\{0\})}*\delta_0=\mathscr{U}_{E((\cdot)\setminus\{0\})},\quad 1)\text{获证；}$$

2)，3)由1)得到；

4) 我们有

$$\mathscr{U}_E(\mu:\ \mu(A)=0)=e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}E^k(\mu:\ \mu(A)=0),$$

但$E^k(\mu:\mu(A)=0)=(E(\mu:\mu(A)=0))^k$，代入上式得

$$\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A)=0)=e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(E(\mu:\ \mu(A)=0))^k$$
$$=e^{-E(N)}\cdot\exp(E(\mu:\mu(A)=0))=\exp(-E(\mu:\mu(A)>0))；$$

5) 由4)知$\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A_2)=0)>0$，所以

$$\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A_1)=0|\mu(A_2)=0)=\frac{\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A_1)=0,\mu(A_2)=0)}{\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A_2)=0)}$$
$$=\exp(E(\mu:\mu(A_2)>0))\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A_1\cup A_2)=0)$$
$$=\exp(-E(\mu:\mu(A_1)>0,\mu(A_2)=0)).\quad\text{定理证毕。}$$

62. 下面我们来计算$\mathscr{U}_E$型分布的矩。首先对于$E\in\mathscr{E}_+$定义其一阶矩和二阶矩测度如下：

$$I_E(A)=\int\mu(A)E(d\mu),\quad A\in\mathscr{B}；$$

$$I_E^{(2)}(A_1\times A_2)=\int\mu(A_1\mu)(A_2)E(d\mu),\quad A_1,A_2\in\mathscr{B},$$

如果对于任意有界的$A\in\mathscr{B}$，有

$$I_E(A)<\infty,\quad I_E^{(2)}(A\times A)<\infty,$$

我们就说E的一、二阶矩存在。此时，在Laplace泛函

$$\Psi_E(f)=\int e^{-\mu f}E(d\mu)$$

中分别令$f=t1_A$或$t_1 1_{A_1}+t_2 1_{A_2}$，则

$$I_E(A)=-\frac{d}{dt}\Psi_E(t1_A)\Big|_{t=0},\tag{1}$$

$$I_E^{(2)}(A_1\times A_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\Psi_E(t_1 1_{A_1}+t_2 1_{A_2})\Big|_{t_1=0,t_2=0}.\tag{2}$$

现在考虑分布$\mathscr{U}_E$.设$A\in\mathscr{B}$任意，因为

$$\int\mu(A)E^k(d\mu)=\int(\mu_1+\cdots+\mu_k)(A)(E\times\cdots\times E)(d\mu_1\times\cdots\times d\mu_k)$$

$$\leqslant\int\prod_{i=1}^{k}(1+\mu_i(A))(E\times\cdots\times E)(d\mu_1\times\cdots\times d\mu_k)=\left(\int(1+\mu(A))E(d\mu)\right)^k,$$

$$\int(\mu(A))^2E^k(d\mu)=\int((\mu_1+\cdots+\mu_k)(A))^2(E\times\cdots\times E)(d\mu_1\times\cdots\times d\mu_k)$$

$$\leqslant\int\prod_{i=1}^{k}(1+\mu_i(A))^2(E\times\cdots\times E)(d\mu_1\times\cdots\times d\mu_k)=\left(\int(1+\mu(A))^2E(d\mu)\right)^k,$$

所以当I_E及$I_E^{(2)}$存在时，有

$$I_{\mathscr{U}_E}(A)=\int\mu(A)\mathscr{U}_E(d\mu)=e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\mu(A)E^k(d\mu)$$

$$\leqslant e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int(1+\mu(A))E(d\mu)\right)^k<\infty,$$

$$I_E^{(2)}(A\times A)=\int(\mu(A))^2\mathscr{U}_E(d\mu)=e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int(\mu(A))^2E^k(d\mu)$$

$$\leqslant e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\int(1+\mu(A))^2E(d\mu)\right]^k<\infty,$$

即$\mathscr{U}_E$的一、二价矩也存在，于是我们可以利用前面的公式(1)与(2)，并且注意到

$$\Psi_{\mathscr{U}_E}(f)=\exp\{-\int(1-e^{-\mu f})E(d\mu)\},\qquad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

直接算出：

$$I_{\mathscr{U}_E}(A)=I_E(A),\quad I_{\mathscr{U}_E}^{(2)}(A_1\times A_2)=I_E^{(2)}(A_1\times A_2)+I_E(A_1)I_E(A_2).$$

下面我们刻划简单的$\mathscr{U}_E$分布。称$E\in\mathscr{E}_+$是连续的(或扩散的)，如果对每一$a\in X$，都有

$$E(\mu;\ \mu(a)>0)=0,$$

这等价于对每一$a\in X$，$I_E(a)=0$。

63．定理 分布$\mathscr{U}_E$是简单点分布的充分必要条件是：E是连续的和简单的。

证明 设$\mathscr{U}_E$是简单点分布，则由于

$$\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_{\frac{E}{2}}*\mathscr{U}_{\frac{E}{2}}$$

根据定理55之2)可知对任意$a\in X$有

$$\mathscr{U}_{\frac{1}{2}E}(\mu;\ \mu(a)>0)=0,$$

即$I_{\mathscr{U}_{\frac{1}{2}E}}(a)=I_{\frac{1}{2}E}(a)=0$，这表明$\frac{1}{2}E$是连续的，从而$E$是连续的；又由于

$$0=\mathscr{U}_E(\mu;\mu\in N_s)=e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\ E^k(\mu;\ \mu\bar{\in}N_s),$$

推知$E(\mu;\ \mu\bar{\in}N_s)=0$，即$E$是简单的。

反之，设E连续而且简单，仍由定理55知道$E^n(n\geqslant0)$都是简单的，从而$\mathscr{U}_E$也是简单的。

下面我们研究$\mathscr{U}_E$分布的无后效性。先证明如下的引理。

64．引理 设$E\in\mathscr{E}_+$，$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，则下述命题等价：

1） $A_1\mu,\cdots,A_m\mu$关于分布$\mathscr{U}_E$相互独立；

2） $\mu(A_1),\cdots,\mu(A_m)$关于分布$\mathscr{U}_E$相互独立；

3） 对任意的i,j，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant m$，$\mu(A_i)$与$\mu(A_j)$关于$\mathscr{U}_E$相互独立；

4） 对于任意的i,j，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant m$有

$$E(\mu;\ \mu(A_i)>0,\mu(A_j)>0)=0.$$

证明 1)⇒2)⇒3)是不足道的。往证3)⇒4)。由条件3)及定理61之4)与5)得

$$\begin{aligned}&\exp(-E(\mu;\ \mu(A_i)>0,\mu(A_j)=0))\\&=\mathscr{U}_E(\mu;\ \mu(A_i)=0\,|\,\mu(A_j)=0)=\mathscr{U}_E(\mu;\ \mu(A_i)=0)\\&=\exp(-E(\mu;\ \mu(A_i)>0)),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&E(\mu;\ \mu(A_i)>0,\mu(A_j)>0)\\&=E(\mu;\ \mu(A_i)>0)-E(\mu;\ \mu(A_i)>0,\ \mu(A_j)=0)=0.\end{aligned}$$

4)⇒1)。设条件4)成立，为证映射$A_1\mu,\cdots,A_m\mu$关于分布$\mathscr{U}_E$的相互独立性，须证它们所产生的σ代数${}_{A_1}\mathbf{N},\cdots,{}_{A_m}\mathbf{N}$关于分布$\mathscr{U}_E$相互独立。又因为$\sigma$代数${}_{A_i}\mathbf{N}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$是由映射族$\mu\frown\mu(B)$，$B\subset A_i$，所产生的，即${}_{A_i}\mathbf{N}=\sigma(\mu(B);B\subset A_i)$，所以问题又归于证明$(N,\ \mathbf{N},\mathscr{U}_E)$上的随机变量族

$$\{\mu(B);\ B\subset A_1\},\cdots,\{\mu(B);\ B\subset A_m\}$$

的相互独立性。为此又只须证明对任意的$n_1,\cdots n_m$，随机向量

$$(\mu(B_{11}),\cdots,\mu(B_{1n_1})),\ \cdots,(\mu(B_{m_1}),\cdots,\mu(B_{mn_m}))$$

是相互独立的。其中$B_{i1},\cdots,B_{in_i}$是A_i的互不相交子集，$1\leqslant i\leqslant m$。

设$t_{11},\cdots,t_{1n_1}\cdots,t_{m1},\cdots,t_{mn_m}$是非负实数，则

$$\int \exp\left(-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}t_{ij}\cdot\mu(B_{ij})\right)\mathscr{U}_E(d\mu)=\Psi_{\mathscr{U}_E}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}t_{ij}\ 1_{B_{ij}}\right)$$

$$=\exp\left\{-\int\left[1-\exp\left(-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}t_{ij}\cdot\mu(B_{ij})\right)\right]E(d\mu)\right\}$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\exp\left\{-\int\left[1-\exp\left(-\sum_{j=1}^{n_i}t_{ij}\cdot\mu(B_{ij})\right)\right]E(d\mu)\right\}$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\int\exp\left(-\sum_{j=1}^{n_i}t_{ij}\cdot\mu(B_{ij})\right)\mathscr{U}_E(d\mu),$$

上式右边的第三个等号是由于条件4)成立。于是得

$$(\mathscr{U}_E)_{B_{11},\cdots,B_{1n_1},\cdots,B_{m1},\cdots,B_{mn_m}}$$

$$=\mathop{\times}_{i=1}^{m}(\mathscr{U}_E)_{B_{i1},\cdots,B_{in_i}},$$

这便证明了我们所要求的独立性。

65. 定理 分布$\mathscr{U}_E$是无后效的，当且仅当

$$E(\mu:\ \mu不是n\delta_a形式,\ a\in X,\ n\in Z_+)=0.$$

证明 设

$$Y=(\mu:\ \mu具有n\delta_a形式, a\in X, n\in Z_+),$$

则Y与$(\mu:\ \mu\in N,\ \mu^*(X)\leqslant 1)$重合，从而$Y\in\mathbf{N}$。

现假定$E(N\backslash Y)=0$，设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，则对任意的$i,\ j,\ i\neq j,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant m$有

$$E(\mu:\ \mu(A_i)>0,\mu(A_j)>0)=0,$$

于是由上面的引理知$A_1\mu,\cdots,A_m\mu$关于分布$\mathscr{U}_E$相互独立，由定理34知$\mathscr{U}_E$无后效。

反之，设$\mathscr{U}_E$无后效，又设$(\mathscr{D}_n)$是X的无穷小分割序列，则

$$E(\mu:\ \mu^*(X)>1)$$

$$=\sup_n E(\mu:\ 存在D_1,\ D_2\in\mathscr{D}_n,\ D_1\neq D_2,\ \mu(D_1)>0,\mu(D_2)>0),$$

但由上面的引理知对每一n，有

$$E(\mu:\ 存在D_1,\ D_2\in\mathscr{D}_n,\ D_1\neq D_2,\ \mu(D_1)>0,\mu(D_2)>0)=0,$$

所以$E(\mu:\ \mu^*(X)>1)=0$，即$E(N\backslash Y)=0$。证毕。

§10. 点过程的疏稀

66. 设$\xi=\xi(\omega,\cdot)$是点过程，当$\omega\in\Omega$固定时，$\xi(\omega,\cdot)$是(X,ρ_X)上的一个计数测度，于是可表为：

$$\xi(\omega,\cdot)=\sum_m \delta_{a_m},$$

其中$(a_1,\cdots a_2,\cdots,a_m,\cdots)$是$X$中的有限或可列无穷点列，诸$a_m$可能有重复，并且是依赖于$\omega$的。如果对于这些点中的每一个，以相互独立的方式和相同的概率保留或去掉，这样我们就得到一个新的点过程，称为点过程ξ的稀疏。

下面我们从理论上来详细讨论这一过程，为此应该先将上面的直观描述严格化。

67. 设b_j,c_j是非负实数，$j=0,1,2,\cdots$，则

$$\mu_1=\sum_{j\in Z_+} b_j\delta_j,\qquad \mu_2=\sum_{j\in Z_+} c_j\delta_j$$

是Z_+上的局部有限测度。以如下方式定义μ_1与μ_2的卷积：

$$\mu_1*\mu_2=\sum_{i,j\in Z_+} c_i b_j\ \delta_{i+j}.$$

现设$c\in[0,1]$,定义算子$\mathscr{D}_c$：

$$\mathscr{D}_c\ \delta_l=((1-c)\delta_0+c\delta_1)^l,\ l\in Z_+,$$

上式右边是Z_+上的测度$(1-c)\delta_0+c\delta_1$的l次卷积(当$l=0$时定义这个卷积为δ_0)，称$\mathscr{D}_c$为Z_+上的稀疏算子，其中c称为$\mathscr{D}_c$的浓度。显然，如果$c=1$，则$\mathscr{D}_c\delta_l=\delta_l$。现设

$$\mu=\sum_{j\in Z_+} c_i\delta_i\ ,\quad (c_i\geqslant 0,\ j\in Z_+)$$

定义

$$\mathscr{D}_c\mu=\sum_{j\in Z_+} c_i\mathscr{D}_c\delta_i\ .$$

进一步考虑Z_+^m上的测度

$$\mu=\sum_{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m} c(l_1,\cdots,l_m)\delta_{(l_1,\cdots,l_m)},$$

其中对于每一$(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m$，有$c(l_1,\cdots,l_m)\geqslant 0$。我们令

$$\mathscr{D}_c\mu=\sum_{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m} c(l_1,\cdots,l_m)\mathscr{D}_c\delta_{(l_1,\cdots,l_m)},$$

其中

$$\mathscr{D}_c\delta_{(l_1,\cdots,l_m)}=\mathop{\times}_{i=1}^{m}(\mathscr{D}_c\delta_{l_i}),$$

我们也称$\mathscr{D}_c$为Z_+^m上的稀疏算子。

现在回到我们原来的讨论，即考虑$(N,\mathbf{N})$上的有限测度$E\in\mathscr{E}_+$。下面的定理，当$E=P\in\mathscr{P}_N$时就是稀疏点过程的存在定理。

68. 定理 设$c\in[0,1]$，$E\in\mathscr{E}_+$，则在$(N,\mathbf{N})$上存在唯一的有限测度$\mathscr{D}_cE\in\mathscr{E}_+$，适合条件：对$\mathscr{B}$中任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m$有

$$(\mathscr{D}_c E)_{A_1,\cdots,A_m}$$

$$= \sum_{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m} E(\mu:\ \mu(A_i)=l_i,\ 1\leqslant j\leqslant m) \mathop{\times}_{i=1}^{m} \mathscr{D}_c \delta_{l_i}.$$

证明 *存在性* 无妨设$E\in\mathscr{P}_N$，否则可考虑$E/E(N)$。设$E=P\in\mathscr{P}_N$，对不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，令

$$P^{A_1,\cdots,A_m} = \sum_{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m} P_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m) \mathop{\times}_{i=1}^{m} \mathscr{D}_c \delta_{l_i},$$

容易验证概率分布族

$$\{P^{A_1,\cdots,A_m}:\ m\geqslant 1,\ A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}\text{且互不相交}\}$$

是Kolmogorov相容族。现在证明它还满足定理13的条件3)。

设$A=A_k\cup\cdots\cup A_m$，$0<k<m$。我们要证，对任意$n_1,\cdots,n_k\in Z_+$有

$$P^{A_1,\cdots,A_{k-1},A}(n_1,\cdots,n_k) = \sum_{j_k+\cdots+j_m=n_k} P^{A_1,\cdots,A_m}(n_1,\cdots,n_{k-1},j_k,\cdots,j_m).$$

由上面的定义有

$$\begin{aligned}
&P^{A_1,\cdots,A_{k-1},A}(n_1,\cdots,n_k)\\
&= \sum_{(l_1,\cdots,l_k)\in Z_+^k} P_{A_1,\cdots,A_{k-1},A}(l_1,\cdots,l_k)\mathscr{D}_c\,\delta_{(l_1,\cdots,l_k)}(n_1,\cdots,n_k)\\
&= \sum_{(l_1,\cdots,l_k)\in Z_+^k}\ \sum_{h_k+\cdots+h_m=l_k} P_{A_1,\cdots,A_{k-1},A_k,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_{k-1},h_k,\cdots,h_m)\\
&\quad\times \mathscr{D}_c\delta_{(l_1,\cdots,l_{k-1},l_k)}(n_1,\cdots,n_k)\\
&= \sum_{(l_1,\cdots,l_k)\in Z_+^k}\ \sum_{h_k+\cdots+h_m=l_k} P_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_{k-1},h_k,\cdots,h_m)\\
&\quad\times \sum_{j_k+\cdots+j_m=n_k} \mathscr{D}_c\delta_{(l_1,\cdots l_{k-1},h_k,\cdots,h_m)}(n_1,\cdots,n_{k-1},j_k,\cdots,j_m)\\
&= \sum_{j_k+\cdots+j_m=n_k}\ \sum_{l_1,\cdots l_{k-1},h_k,\cdots,h_m} P_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_{k-1},h_k,\cdots h_m)\\
&\quad\times \mathscr{D}_c\delta_{(l_1,\cdots,l_{k-1},h_k,\cdots,h_m)}(n_1,\cdots,n_{k-1},j_k,\cdots,j_m)\\
&= \sum_{j_k+\cdots+j_m=n_k} P^{A_1,\cdots,A_m}(n_1,\cdots,n_{k-1},j_k,\cdots,j_m),
\end{aligned}$$

这就证明了定理13中的条件3)。又因为显然有

$$P^{A_n}(0)\geqslant P_{A_n}(0),\quad A_n\in\mathscr{B},\quad A_n\downarrow\phi,$$

所以定理13中条件4)也满足，从而由定理13知，满足本定理条件的$\mathscr{D}_c P$是存在的。

唯一性　对于$P\in\mathscr{P}_N$，上面求得的$\mathscr{D}_cP$也在$\mathscr{P}_N$中，而由推论5得其唯一性。这个结果对于$E\in\mathscr{E}_+$也成立。证毕

下面是$\mathscr{D}_c$算子的一些重要性质。

首先由定义可见，$\mathscr{D}_c\delta_l$作为Z_+上的概率测度是以c,l为参数的二项分布，所以

$$\mathscr{D}_c\delta_l(n)=\binom{l}{n}c^n(1-c)^{l-n},\quad 0\leqslant n\leqslant l.$$

现设$E\in\mathscr{E}_+$，在其Laplace泛函$\Psi_E(f)$中取$f=\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}$，$A_i\in\mathscr{B}$，$0<h_i\leqslant1$，$1\leqslant i\leqslant m$，则

$$\Psi_E\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)=\int(h_1^{\mu(A_1)}\cdots h_m^{\mu(A_m)})E(d\mu)$$

$$=\sum_{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m}(h_1^{l_1}\cdots h_m^{l_m})\,E_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m),$$

我们称$\Psi_E\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)$为$E_{A_1,\cdots,A_m}$的母函数。

69．引理　设$E\in\mathscr{E}_+$，$c\in[0,1]$，$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，则

$$\Psi_{\mathscr{D}_cE}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)$$

$$=\Psi_E\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{(1-c)+ch_i}\right),\qquad 0<h_i\leqslant1,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

证明　$\Psi_{\mathscr{D}_cE}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)$

$$=\sum_{(n_1,\cdots,n_m)\in Z_+^m}h_1^{n_1}\cdots h_m^{n_m}\sum_{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m}E_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)$$

$$\times\mathop{\times}_{i=1}^m\mathscr{D}_c\delta_{l_i}(n_1,\cdots,n_m)$$

$$=\sum_{(n_1,\cdots,n_m)\in Z_+^m}(ch_1)^{n_1}\cdots(ch_m)^{n_m}\sum_{\substack{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m\\ l_i\geqslant n_i,1\leqslant i\leqslant m}}E_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)$$

$$\binom{l_1}{n_1}\cdots\binom{l_m}{n_m}(1-c)^{l_1-n_1}\cdots(1-c)^{l_m-n_m}$$

$$=\sum_{(l_1,\cdots,l_m)\in Z_+^m}((1-c)+ch_1)^{l_1}\cdots((1-c)+ch_m)^{l_m}E_{A_1,\cdots,A_m}(l_1,\cdots,l_m)$$

$$=\Psi_E\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{(1-c)+ch_i}\right).$$

70．定理　设$c,c_1,c_2\in[0,1]$，a_1,a_2为非负实数，$E,E_1,E_2\in\mathscr{E}_+$，则

1) $\mathscr{D}_c(a_1E_1+a_2E_2)=a_1\mathscr{D}_cE_1+a_2\mathscr{D}_cE_2$；

2) $\mathscr{D}_c(E_1*E_2)=(\mathscr{D}_cE_1)*(\mathscr{D}_cE_2)$；

3) $\mathscr{D}_{c_2}(\mathscr{D}_{c_1}E)=\mathscr{D}_{c_2c_1}E$；

4) $\mathscr{D}_c(\exp E)=\exp(\mathscr{D}_cE)$；

5) 如果$0<c\leqslant 1$，则$E\frown\mathscr{D}_cE$是$\mathscr{E}_+$到$\mathscr{E}_+$内的一一映射．

证明 1) 显然．

2) 设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，$0<h_1,\cdots,h_m\leqslant 1$，由上面的引理得

$$\Psi_{\mathscr{D}_c(E_1*E_2)}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)=\Psi_{E_1*E_2}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{(1-c)+ch_i}\right)$$

$$=\Psi_{E_1}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{(1-c)+ch_i}\right)\Psi_{E_2}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{(1-c)+ch_i}\right)$$

$$=\Psi_{\mathscr{D}_cE_1}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)\Psi_{\mathscr{D}_cE_2}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)$$

$$=\Psi_{\mathscr{D}_cE_1*\mathscr{D}_cE_2}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right),$$

这说明

$$(\mathscr{D}_c(E_1*E_2))_{A_1,\cdots,A_m}=(\mathscr{D}_cE_1*\mathscr{D}_cE_2)_{A_1,\cdots,A_m},$$

由推论5，可知2)成立．

3) 仍设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，且互不相交，$0<h_1,\cdots,h_m\leqslant 1$．两次运用上面的引理得

$$\Psi_{\mathscr{D}_{c_2}(\mathscr{D}_{c_1}E)}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)=\Psi_{\mathscr{D}_{c_2c_1}E}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right),$$

再由推论5知3)成立．

4) 仍设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$互不相交，$0<h_1,\cdots,h_m\leqslant 1$．令$f=\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}$，然后应用前面的引理及公式：

$$\Psi_{\exp E}(f)=\exp(\Psi_E(f)).$$

5) 设$E_1,E_2\in\mathscr{E}_+$，$c>0$，$\mathscr{D}_cE_1=\mathscr{D}_cE_2$，又设$A_1,\cdots,A_m$属于$\mathscr{B}$且互不相交．对于固定的$(h_1,\cdots,h_m)\in(1-c,1]^m$，方程组$h_i=(1-c)+ck_i$，$1\leqslant i\leqslant m$在$(0,1]^m$中有唯一解$(k_1,\cdots,k_m)$，于是

$$\Psi_{E_1}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right)=\Psi_{E_1}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{(1-c)+ck_i}\right)$$

$$=\Psi_{\mathscr{D}_cE_1}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{k_i}\right)=\Psi_{\mathscr{D}_cE_2}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{k_i}\right)$$

$$=\Psi_{E_2}\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\right),$$

这说明$(E_1)_{A_1,\cdots,A_m}$与$(E_2)_{A_1,\cdots,A_m}$的母函数在$(1-c,1]^m$上相等，所以$(E_1)_{A_1,\cdots,A_m}=(E_2)_{A_1,\cdots,A_m}$，从而$E_1=E_2$．

第三章　无穷可分点过程

本章讨论最重要的一类点过程：无穷可分点过程，首先力求完整而详细地叙述无穷可分点过程的构造和分类，然后分别讨论 Poisson 过程、Gauss-Poisson 过程、正规无穷可分点过程和奇异无穷可分点过程，并为下一章研究点过程的收敛性作好准备。

§1. 预备：有限变差测度

1. 定义　$(N, \mathbf{N})$ 上定义的全体有限广义测度记为 $\mathscr{E}_r$。由Jordan分解定理，对任意的 $E\in\mathscr{E}_r$，存在唯一的 $E^+\in\mathscr{E}_+$，$E^-\in\mathscr{E}_+$ 使

$$E=E^+-E^-,$$

记

$$\|E\|=E^+(N)+E^-(N),$$

容易证明 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{E}_r$ 上的范数，$(\mathscr{E}_r, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间。

下述引理对任意可测空间上的有限变差测度也成立。

2. 引理　设 $\mathbf{N}_1$ 是 $\mathbf{N}$ 的子代数，$\sigma(\mathbf{N}_1)=\mathbf{N}$，则对任意的 $E\in\mathscr{E}_r$ 有

$$\|E\|=\sup_{\mathscr{K}}\sum_{Y\in\mathscr{K}}|E(Y)|$$

其中 $\mathscr{K}$ 跑遍 $\mathbf{N}_1$ 中互不相交的有限族。

证明　对于 $\mathbf{N}$ 中任意互不相交的有限族 $\mathscr{K}$ 有：

$$\sum_{Y\in\mathscr{K}}|E(Y)|=\sum_{Y\in\mathscr{K}}|E^+(Y)-E^-(Y)|$$

$$\leqslant\sum_{Y\in\mathscr{K}}E^+(Y)+\sum_{Y\in\mathscr{K}}E^-(Y)\leqslant E^+(N)+E^-(N)=\|E\|$$

另一方面，存在 $Y_0\in\mathbf{N}$，使

$$E^+(\cdot)=E((\cdot)\cap Y_0),$$

$$E^-(\cdot)=-E((\cdot)\cap Y_0^c),$$

命 $|E|=E^++E^-$。由于 $\sigma(\mathbf{N}_1)=\mathbf{N}$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $Y_\varepsilon\in\mathbf{N}_1$ 使

$$|E|(Y_\varepsilon\Delta Y_0)<\varepsilon,$$

此处 Δ 表示对称差。于是

$$|E(Y_\varepsilon)|+|E(N\setminus Y_\varepsilon)|$$

$$=|E^+(Y_\varepsilon)-E^-(Y_\varepsilon)|+|E^+(N\setminus Y_\varepsilon)-E^-(N\setminus Y_\varepsilon)|$$

$$\geqslant-4\varepsilon+|E^+(Y_0)-E^-(Y_0)|+|E^+(N\setminus Y_0)-E^-(N\setminus Y_0)|=-4\varepsilon+\|E\|,$$

由于 $\mathbf{N}_1$ 是代数，Y_ε 与 $N\setminus Y_\varepsilon$ 都属于 $\mathbf{N}_1$；又因 ε 是任意的，故引理得证。

下面的定理是上述引理的推论。

3. 定理 设 $E\in\mathscr{E}_\tau$，则

1) 如果 $\Gamma\subset\mathscr{B}$ 是半环，$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$，则

$$\|E\|=\sup_{A_1,\cdots,A_m}\|E_{A_1,\cdots,A_m}\|,$$

其中 $A_1,\cdots,A_m$ 跑遍 Γ 中互不相交的有限族。

2) 设 $A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$，则

$$\|E\|=\sup_n\|{}_{A_n}E\|.$$

证明 1)由上面的引理知，对 σ 代数 $\mathsf{N}_{A_1,\cdots,A_m}$ 中任意有限互不相交的集族 $\mathscr{K}$ 有

$$\sum_{Y\in\mathscr{K}}|E(Y)|\leqslant\|E_{A_1,\cdots,A_m}\|\leqslant\|E\|$$

另一方面，设 $Y_1,\cdots,Y_s\in\bigcup_{A_1,\cdots,A_m}\mathsf{N}_{A_1,\cdots,A_m}$，则由引理 I.4 推知的存在 $A_1',\cdots,A_t'$ 使 $Y_1,\cdots,Y_s\in\mathsf{N}_{A_1',\cdots,A_t'}$，因此再次应用上面的引理知

$$\|E\|=\sup_{\mathscr{K}}\sum_{Y\in\mathscr{K}}|E(Y)|=\sup_{A_1,\cdots,A_m}\|E_{A_1,\cdots,A_m}\|,$$

这里 $\mathscr{K}$ 跑遍代数 $\widetilde{\mathsf{N}}=\bigcup_{A_1,\cdots,A_m}\mathsf{N}_{A_1,\cdots,A_m}$ 的互不相交的有限族，而 $A_1,\cdots,A_m$ 跑遍 Γ 中互不相交的有限族。

2) 固定 n，设 $B_1,\cdots,B_m\in\mathscr{B}$ 互不相交并且 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m\subset A_n$，则

$$\|E_{B_1,\cdots,B_m}\|=\|({}_{A_n}E)_{B_1,\cdots,B_m}\|\leqslant\|{}_{A_n}E\|\leqslant\|E\|,$$

另一方面，由于 $A_n\uparrow X$，故若以 Γ 记 $\mathscr{B}$ 中能被某个 A_n 包含的有界集全体，则 Γ 是 $\mathscr{B}$ 的子环，并且 $L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$，所以

$$\|E\|=\sup_{B_1,\cdots,B_m}\|E_{B_1,\cdots,B_m}\|,$$

其中 $B_1,\cdots,B_m$ 跑遍 Γ 中一切互不相交的有限族，结合上面已证的不等式就得到所需的结论。

4. 设 $E=E^+-E^-\in\mathscr{E}_\tau$，命

$$\Psi_E(f)=\Psi_{E^+}(f)-\Psi_{E^-}(f),\qquad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

并称 $\psi_E(\cdot)$ 为 E 的 Laplace 变换。

定理 I.38可以推广如下。如果 E_1，$E_2\in\mathscr{E}_\tau$ 并且

$$\Psi_{E_1}(f)=\Psi_{E_2}(f),\qquad 凡 f\in\mathscr{F}_+,$$

则 $E_1=E_2$。

事实上，设 $E_1=E_1^+-E_1^-$ 及 $E_2=E_2^+-E_2^-$ 分别是 E_1 和 E_2 的Jordan 分解，则由

$$\Psi_{E_1}(f)=\Psi_{E_1^+}(f)-\Psi_{E_1^-}(f)=\Psi_{E_2^+}(f)-\Psi_{E_2^-}(f)=\Psi_{E_2}(f),\qquad 凡 f\in\mathscr{F}_+,$$

推出

$$\Psi_{E_1^+ + E_2^-}(f)=\Psi_{E_2^+ + E_1^-}(f), \qquad \text{凡 } f\in\mathscr{F}_+,$$

这说明 $E_1^+ + E_2^- = E_2^+ + E_1^-$从而 $E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^-$，即 $E_1 = E_2$。

5. 设 E_1，$E_2\in\mathscr{E}_r$，其 Jordan 分解分别为

$$E_1 = E_1^+ - E_1^-, \qquad E_2 = E_2^+ - E_2^-,$$

定义它们的卷积为

$$E_1 * E_2 \triangleq (E_1^+ - E_1^-)*(E_2^+ - E_2^-)$$

$$= E_1^+ * E_2^+ + E_1^- * E_2^- - E_1^- * E_2^+ - E_1^+ * E_2^-,$$

于是$E_1 * E_2\in\mathscr{E}_r$，但上式不一定是$E_1 * E_2$的Jordan分解。然而有

$$\|E_1 * E_2\|\leqslant\|E_1^+ * E_2^+\|+\|E_1^- * E_2^-\|+\|E_1^+ * E_2^-\|+\|E_1^- * E_2^+\|$$

$$=\|E_1^+\|\,\|E_2^+\|+\|E_1^-\|\,\|E_2^-\|+\|E_1^-\|\,\|E_2^+\|+\|E_2^-\|\,\|E_1^+\|$$

$$=\|E_1\|\|E_2\|;$$

特别，当$E_1=\cdots=E_m=E$时，我们可以定义

$$E^m = E_1 * E_2 * \cdots * E_m,$$

并称E^m为E的m次卷积。

如果$E_1, E_2\in\mathscr{E}_r$，并且 $E_1^m = E_2$，则称E_1是E_2的m次卷积根，记为$E_1=\sqrt[m]{E_2}$。

容易从定义直接证明：对于$E_1, E_2\in\mathscr{E}_r$仍有

$$\Psi_{E_1 * E_2}(f)=\Psi_{E_1}(f)\cdot\Psi_{E_2}(f), \quad \text{凡}f\in\mathscr{F}_{m+};$$

特别

$$\Psi_{E^m}(f)=(\Psi_E(f))^m, \quad \text{凡}f\in\mathscr{F}_{m+}.$$

对于$E\in\mathscr{E}_+$，在 Ⅱ §9中已经定义了$\exp E$。现设$E\in\mathscr{E}_r$，仍命

$$\exp E=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}E^k.$$

下面的一些结果是显然的。首先有

$$\|\exp E\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\|E\|^k=\exp(\|E\|),$$

其次对任意的$E_1, E_2\in\mathscr{E}_r$，有

$$\exp(E_1+E_2)=(\exp E_1)*(\exp E_2),$$

而对于任意的$A\in\mathscr{A}$，有

$$_A(\exp E)=\exp(_AE),$$

此外，对于互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$总有：

$$(\exp E)_{A_1,\cdots,A_m}=\exp(E_{A_1,\cdots,A_m}).$$

6. 引理 设$E\in\mathscr{E}_r$，n是奇数。则E最多有一个n次卷积根属于$\mathscr{E}_r$；若n是偶数，则E最多有两个n次卷积根属于$\mathscr{E}_r$。

证明 设E存在n次卷积根$E_1=\sqrt[n]{E}$。则因

$$\Psi_E(f)=(\Psi_{E_1}(f))^n,\qquad f\in\mathscr{F}_+,$$

且由于方程$\Psi_E(f)=x^n$在n为奇数时只有一个实数解，而在n为偶数时最多有两个实数解，所以当n为奇数时，E_1必唯一；而当n是偶数时$\mathscr{E}_r$中至多存在两个不同的E_1使$E_1=\sqrt[n]{E}$。

现在可将定理Ⅱ.59推广如下：

7. 定理 映像$E\frown \exp E$是$\mathscr{E}_r$到自身的一一映像。

证明 设$E_1,E_1\in\mathscr{E}_r$满足$\exp E_1=\exp E_2=E$，则由$\Psi_E(\cdot)=\exp(\Psi_{E_2}(\cdot))=\exp(\Psi_{E_2}(\cdot))$推知$\Psi_{E_1}(\cdot)=\Psi_{E_2}(\cdot)$，所以$E_1=E_2$。

由于这个结果，当$E=\exp E_0$时，就记为

$$E_0=\log E,$$

特别当$\|E-\delta_0\|<1$时，令

$$E_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(E-\delta_0)^k,$$

右边的级数绝对收敛。我们有：

$$\Psi_{E_0}(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(\Psi_E(f)-1)^k,\qquad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

所以

$$\Psi_E(f)=\exp(\Psi_{E_0}(f)),\qquad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

从而$E=\exp E_0$，即$E_0=\log E$。

应用这一结果，可以证明下面的定理。

8. 定理 设$E\in\mathscr{E}_r$，则$\log E$存在的充要条件为：

1) $E(\{0\})>0$；

2) 对任意的奇数$2k+1$，存在E的$2k+1$次卷积根，记作E_{2k+1}，$E_{2k+1}\in\mathscr{E}_r$，并且$\lim\limits_{k\to\infty}\|E_{2k+1}\|=1$。

证明 *必要性* 如果$L=\log E$，$L\in\mathscr{E}_r$，则由$E=\exp L$，得知$\sqrt[n]{E}=\exp\left(\frac{1}{n}L\right)$存在。并且

$$E(\{0\})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}L^k(\{0\})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(L(\{0\}))^k=\exp(L(\{0\}))>0;$$

又当$n\to\infty$时有

$$\left|\|\exp\left(\frac{1}{n}L\right)\|-1\right|=\left|\|\delta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}L\right)^k\|-\|\delta_0\|\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k(\|L\|)^k \longrightarrow 0.$$

充分性 设条件1)和2)成立。则由

$$(E_{2k+1})^{2k+1}=E$$

推出

$$(E_{2k+1}(\{0\}))^{2k+1}=E(\{0\})>0,$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}E_{2k+1}(\{0\})=\lim_{k\to\infty}(E(\{0\}))^{\frac{1}{2k+1}}=1,$$

然而

$$\|E_{2k+1}((\cdot)\backslash\{0\})\|=E^+_{2k+1}(N\backslash\{0\})+E^-_{2k+1}(N\backslash\{0\})$$

$$=E^+_{2k+1}(N)+E^-_{2k+1}(N)-|E_{2k+1}|(\{0\})$$

$$=\|E_{2k+1}\|-|E_{2k+1}|(\{0\})\longrightarrow 0,\text{ 当}k\to\infty;$$

于是当k趋于∞时有：

$$\|E_{2k+1}-\delta_0\|\leqslant\|E_{2k+1}((\cdot)\backslash\{0\})\|+|E_{2k+1}(\{0\})-1|\longrightarrow 0;$$

根据上一段最后的结果，只要$\|E_{2k+1}-\delta_0\|<1$，则$\log E_{2k+1}$就存在，因此$\log E=(2k+1)\log E_{2k+1}$亦存在。证毕。

§2. 无穷可分分布的刻划（一）

9. 定义 设ξ是点过程，如果对任意的正整数n，存在相互独立同分布的点过程$\xi_1,\cdots,\xi_n$使

$$\xi\overset{d}{=}\xi_1+\cdots+\xi_n,$$

则称ξ是无穷可分点过程。

设ξ是无穷可分的，如果它的分布记为$P\xi^{-1}$，而上述表达式中$\xi_1,\cdots,\xi_n$的分布是$P\xi_1^{-1}=\cdots=P\xi_n^{-1}$，

则

$$P\xi^{-1}=(P\xi_1^{-1})*\cdots*(P\xi_n^{-1})=(P\xi_1^{-1})^n,$$

从而对任意正整数n，$P\xi^{-1}$的n次卷积根存在。

设$P\in\mathscr{P}_N$，称P是无穷可分的，如果对于任意的正整数n，$\sqrt[n]{P}$存在且属于$\mathscr{P}_N$。

全部无穷可分分布记为$\mathscr{P}_{IN}$。

本章的全部内容在于建立无穷可分分布的一般理论。这一节只考虑一个简单的情形，下面的定理11是本节的主要结果，首先证明一个引理。

10. 引理 设$P\in\mathscr{P}_N$可表为$\mathscr{U}_E$形式，$G\in\mathscr{E}_+$。如果$E(\{0\})=0$，则E是唯一的，并且

$$\lim_{n\to\infty}\| n\sqrt[n]{P}((\cdot)\setminus\{0\})-E\|=0$$

证明 当$P=\mathscr{U}_E=e^{-E(N)}\exp E$时，对任意正整数$n$有：

$$\sqrt[n]{P}=e^{-\frac{E}{n}(N)}\exp\left(\frac{E}{n}\right)=\mathscr{U}_{\left(\frac{E}{n}\right)},$$

由定理Ⅱ,61知：

$$(n\sqrt[n]{P})((\cdot)/\{0\})=n\mathscr{U}_{\left(\frac{E}{n}\right)}((\cdot)\setminus\{0\})$$

$$=e^{-\frac{\|E\|}{n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^{k-1}}E^k=\left(e^{-\frac{\|E\|}{n}}\right)\left(E+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^{k-1}}E^k\right),$$

从而由$E(\{0\})=0$得：

$$\|(n\sqrt[n]{P}((\cdot)\setminus\{0\})-E\|$$

$$\leqslant\left\|\left(e^{-\frac{\|E\|}{n}}\right)E-E\right\|+e^{-\frac{\|E\|}{n}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\|E\|^k}{k!\,n^{k-1}}$$

$$\leqslant\left(1-e^{-\frac{\|E\|}{n}}\right)\|E\|+\frac{\|E\|^2}{n},$$

命$n\to\infty$就得：

$$\lim_{n\to\infty}\|n\sqrt[n]{P}((\cdot)\setminus\{0\})-E\|=0.$$

11. 定理 $P\in\mathscr{P}_N$具有形式$\mathscr{U}_E$，$E\in\mathscr{E}_+$，当且仅当：1) $P\in\mathscr{P}_{IN}$，2) $P(\mu:\mu(X)=0)=P(\{0\})>0$。

证明 **必要性** 对任意的正整数n，已知

$$\mathscr{U}_{(E/n)}=n\sqrt{\mathscr{U}_E},$$

所以$P=\mathscr{U}_E$总是无穷可分的。又由定理Ⅱ.61知

$$P(\{0\})=\mathscr{U}_E(\mu:\mu(X)=0)=e^{-E(\mu:\ \mu(X)>0)}>0.$$

充分性 现设$P\in\mathscr{P}_{IN}$并且$P(\{0\})>0$。由于P是无穷可分的，故$\sqrt[n]{P}$存在并且$\|\sqrt[n]{P}\|=1$，从而由定理8，$\log P$唯一存在，即存在某个$L\in\mathscr{E}_r$，使得：

$$P=\exp L;$$

命

$$E(\cdot)=L((\cdot)\setminus\{0\}),$$

则

$$P=\exp(E+L(\{0\})\delta_0)=e^{L(\{0\})}\exp E,$$

又由$P(N)=1$得

$$1=P(N)=(\exp L)(N)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(L(N))^k=\exp(L(N)),$$

从而$L(N)=0$，于是由上面E的定义，得

$$E(N)=L(N\backslash\{0\})=-L(\{0\}),$$

代入上面P的表达式得

$$P=e^{-E(N)}\exp E;$$

由$\mathscr{U}_E$型分布的定义，还须证明$E\in\mathscr{E}_+$。由于$E\in\mathscr{E}_r$，并且$P=e^{-E(N)}\exp E$存在 $2k+1$次卷积根：

$$\sqrt[2k+1]{P}=\exp(-E(N)/2k+1)\exp\left(\frac{1}{2k+1}E\right)$$

$$=\exp(-E(N)/2k+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(2k+1)^n}E^n,$$

注意到$E(\{0\})=0$ 及$\delta_0((\cdot)\backslash\{0\})=0$得到：

$$(2k+1)(\sqrt[2k+1]{P}((\cdot)\backslash\{0\})$$

$$=\exp(-E(N)/(2k+1))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{(2k+1)^{n-1}}E^n,$$

重复前面引理的证明可得

$$\lim_{k\to\infty}\|(2k+1)\sqrt[2k+1]{P}((\cdot)\backslash\{0\})-E\|=0,$$

于是可知$E\in\mathscr{E}_+$，从而$P=\mathscr{U}_E$确为$\mathscr{U}_E$型分布。

上面的定理刻划了$\mathscr{U}_E$型分布，同时也部分地给出了无穷可分分布的表达式，即当$P(\{0\})>0$时的无穷可分分布就是$\mathscr{U}_E$型分布。我们稍后还将给出满足$P(\{0\})=0$的无穷可分分布的表达式。

下面的推论指出了一类重要的无穷可分分布。首先引入一个定义。

12. 定义 设$P\in\mathscr{P}_N$，称P是有限点分布，如果

$$P(\mu:\mu(X)<\infty)=1.$$

有限点分布是一类很重要的分布；我们也称分布为有限点分布的点过程为有限点过程。

13. 推论 设$P\in\mathscr{P}_N$，且P是有限点分布，则P是无穷可分的，当且仅当P是$\mathscr{U}_E$型分布。

证明 由定理11，只须证明$P(\{0\})>0$。假定$P(\{0\})=0$，则$\sqrt[n]{P}(\{0\})=0$，或$\sqrt[n]{P}(\mu:\mu(X)\geqslant 1)=1$。

于是

$$P(\mu:\mu(X)\geqslant n)=(\sqrt[n]{P})^n(\mu:\mu(X)\geqslant n)$$

$$\geqslant(\sqrt[n]{P}(\mu:\mu(X)\geqslant 1))^n=1,$$

令$n\to\infty$则得$P(\mu:\mu(X)=\infty)=1$，这与P为有限点分布的假设矛盾。

§3 依范数收敛

14. 我们已知$(\mathscr{E}_r,\|\cdot\|)$是一个Banach空间（我们虽然采用Banach空间这一术

语，但本书的任何结果，均不依赖于Banach空间的理论）。于是可在$\mathscr{E}_r$中引入距离如下：

$$d(E_1,E_2)=\|E_1-E_2\|,\quad E_1,E_2\in\mathscr{E}_r;$$

称$\mathscr{E}_r$中的元按距离d的收敛为依范数收敛。

显然有$\mathscr{P}_N\subset\mathscr{E}_+\subset\mathscr{E}_r$，并且$\mathscr{P}_N$和$\mathscr{E}_+$都是距离空间$(\mathscr{E}_r,d)$的闭子集。

本节考虑点分布的依范数收敛问题，即在空间$(\mathscr{P}_N,\ d)$中的收敛问题。首先证明几个不等式。

15．引理 设$P_1,\cdots,P_m,\ Q_1,\cdots,Q_m\in\mathscr{P}_N$，则

$$\left\|\mathop{*}_{i=1}^{m}P_i-\mathop{*}_{i=1}^{m}Q_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left\|P_i-Q_i\right\|.$$

证明 我们有

$$\left\|\mathop{*}_{i=1}^{m}P_i-\mathop{*}_{i=1}^{m}Q_i\right\|$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{m}P_1*\cdots*P_{i-1}*Q_{i+1}*\cdots*Q_m*(P_i-Q_i)\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left\|P_i-Q_i\right\|.$$

16．引理 设$E_1,\ E_2\in\mathscr{E}_+$，则

$$\|\mathscr{U}_{E_1}-\mathscr{U}_{E_2}\|\leqslant2\|E_1-E_2\|.$$

证明 为方便起见，命

$$L_i=E_i-E_i(N)\delta_0,\quad(i=1,2)$$

对于正整数n，有

$$\|\mathscr{U}_{E_1}-\mathscr{U}_{E_2}\|=\|\exp L_1-\exp L_2\|=\|(\exp(n^{-1}L_1))^n-(\exp(n^{-1}L_2))^n\|,$$

应用引理15，得

$$\|\mathscr{U}_{E_1}-\mathscr{U}_{E_2}\|\leqslant n\|\exp(n^{-1}L_1)-\exp(n^{-1}L_2)\|$$

$$=n\left\|n^{-1}L_1-n^{-1}L_2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!n^k}(L_1^k-L_2^k)\right\|$$

$$\leqslant\|L_1-L_2\|+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!n^{k-2}}(\|L_1\|^k+\|L_2\|^k)$$

$$\leqslant\|E_1-E_2\|+\|E_1(N)\delta_0-E_2(N)\delta_0\|+\frac{1}{n}(\|L_1\|^2e^{\|L_1\|}+\|L_2\|^2e^{\|L_2\|}),$$

命$n\to\infty$就得

$$\|\mathscr{U}_{E_1}-\mathscr{U}_{E_2}\|\leqslant2\|E_1-E_2\|.$$

17．引理 对任意的$P\in\mathscr{P}_N$，有

$$\|P-\mathscr{U}_P\|\leqslant2(1-P(\{0\}))^2.$$

证明 命$c=1-P(\{0\})$则

$$\|P-\mathscr{U}_P\|=\left\|P-e^{-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(P(\cdot)\setminus\{0\}))^k\right\|$$

$$= \left\| P(\cdot\setminus\{0\}) + (1-c)\delta_0 - e^{-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(P(\cdot\setminus\{0\}))^k \right\|,$$

注意 $e^{-c}\geqslant 1-c$ 则

$$\|P-\mathscr{U}_P\|\leqslant e^{-c}-(1-c)+(1-e^{-c})\|P(\cdot\setminus\{0\})\|$$

$$+e^{-c}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\|P(\cdot\setminus\{0\})\|^k$$

$$\leqslant\frac{c^2}{2}+c(1-e^{-c})+e^{-c}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{c^k}{k!}\leqslant\frac{c^2}{2}+c^2+\frac{c^2}{2}\left(e^{-c}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2c^{k-2}}{k!}\right)\leqslant 2c^2.$$

结合引理15、17直接得如下的推论。

18. 推论 设 $P_1,\cdots,P_m\in\mathscr{P}_N$，则

$$\left\| \mathop{*}_{i=1}^{m} P_i - \mathscr{U}_{\sum\limits_{i=1}^{m} P_i} \right\| \leqslant 2\sum_{i=1}^{m}(1-P_i(\{0\}))^2.$$

下面是依范数收敛的一个简单结果。首先我们注意一个事实：设 $E_k\in\mathscr{E}_T$，如果 $\|E_k-\delta_0\|<1$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|E_k-\delta_0\|=0$，则有

$$\lim_{k\to\infty}\|\log E_k\|=0,$$

事实上由定义可知

$$\log E_k=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}(E_k-\delta_0)^j,$$

所以

$$\|\log E_k\|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}(\|E_k-\delta_0\|)^j,$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\log E_k\|=0$。

19. 定理 设 E，$E_n\in\mathscr{E}_+$，$n=1,2,\cdots$。则

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{U}_{E_n}-\mathscr{U}_E\|=0,$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\|E_n(\cdot\setminus\{0\})-E(\cdot\setminus\{0\})\|=0.$$

证明 由于 $\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_{E(\cdot\setminus\{0\})}$，所以无妨设

$$E(\{0\})=E_n(\{0\})=0.$$

由引理16推知，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|E_n-E\|=0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{U}_{E_n}-\mathscr{U}_E\|=0,$$

现设 $\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{U}_{E_n}-\mathscr{U}_E\|=0$。由于

$$\begin{aligned}&\|\exp[(E_n-E)-(\|E_n\|-\|E\|)\delta_0]-\delta_0\|\\=&\|[\exp(-E+\|E\|\delta_0)]\\&*[\exp(E_n-\|E_n\|\delta_0)-\exp(E-\|E\|\delta_0)]\|\\\leqslant&\|\exp(-E+\|E\|\delta_0)\|\,\|\mathscr{U}_{E_n}-\mathscr{U}_E\|,\end{aligned}$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\|\exp[(E_n-E)-(\|E_n\|-\|E\|)\delta_0]-\delta_0\|=0,$$

应用本定理前的注意，又得

$$\lim_{n\to\infty}\|(E_n-E)-(\|E_n\|-\|E\|)\delta_0\|=0,$$

由于已经假定 $E_n(\{0\})=E(\{0\})=0$，故

$$\begin{aligned}&\|(E_n-E)-(\|E_n\|-\|E\|)\delta_0\|\\=&((E_n-E)-(\|E_n\|-\|E\|)\delta_0)^+(N)+((E_n-E)-(\|E_n\|-\|E\|)\delta_0)^-(N)\\=&(E_n-E)^+(N)+(E_n-E)^-(N)+|\|E_n\|-\|E\||\\=&\|E_n-E\|+|\|E_n\|-\|E\||,\end{aligned}$$

所以得

$$\lim_{n\to\infty}\|E_n-E\|=0.$$

20. 定义 设 $\{P_{nj}:1\leqslant j\leqslant k_n,\ n=1,2,\cdots\}\subset\mathscr{P}_N$ 是 $\mathscr{P}_N$ 中元素作成的三角序列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\min_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\{0\})=1,$$

则称 $\{P_{nj}\}$ 为强无穷小三角序列。

上面定义中的关系式，显然又等价于

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(X)\geqslant 1)=0.$$

下面的定理是本节的主要结果。

21. 定理 设 $\{P_{nj}\}$ 是强无穷小三角序列，则存在 $E\in\mathscr{E}_+$，$E(\{0\})=0$ 并使

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathop{*}_{j=1}^{k_n}P_{nj}-\mathscr{U}_E\right\|=0$$

的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{k_n}P_{nj}(\cdot\setminus\{0\})-E\right\|=0.$$

证明 首先注意

$$\sum_{j=1}^{k_n}(1-P_{nj}(\{0\}))^2\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(\{0\}))\times\sum_{j=1}^{k_n}(1-P_{nj}(\{0\}))$$

$$=(1-\min_{1\leqslant j\leqslant k_n} P_{nj}(\{0\}))\sum_{j=1}^{k_n}P_{nj}(\mu:\mu\neq 0),$$

现在若设

$$\left\|\sum_{j=1}^{k_n}P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\})-E\right\|\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

则更有

$$\sum_{j=1}^{k_n}P_{nj}(\mu:\mu\neq 0)\longrightarrow E(N),\quad n\to\infty,$$

由上面的注意就有

$$\sum_{j=1}^{k_n}(1-P_{nj}(\{0\}))^2\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

由推论18

$$\left\|\mathop{*}_{j=1}^{k_n}P_{nj}-\mathscr{U}_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}}\right\|\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

又由定理19得出

$$\left\|\mathop{*}_{j=1}^{k_n}P_{nj}-\mathscr{U}_E\right\|\leqslant\left\|\mathop{*}_{j=1}^{k_n}P_{nj}-\mathscr{U}_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}}\right\|$$

$$+\left\|\mathscr{U}_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}}-\mathscr{U}_E\right\|\longrightarrow 0,\quad n\to\infty;$$

反之，若存在 $E\in\mathscr{E}_+$使

$$\left\|\mathop{*}_{j=1}^{k_n}P_{nj}-\mathscr{U}_E\right\|\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

则当$n\to\infty$时有

$$\mathop{*}_{j=1}^{k_n}P_{nj}(\{0\})=\prod_{j=1}^{k_n}P_{nj}(\{0\})\longrightarrow\mathscr{U}_E(\{0\})=e^{-E(N)},$$

或者

$$\sum_{j=1}^{k_n}(1-\log(1-P_{nj}(\{0\})))\longrightarrow E(N),\quad n\to\infty,$$

由于$-\log(1-x)\geqslant x$(当$0\leqslant x<1$)，所以

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}(1-P_{nj}(\{0\}))\leqslant E(N)<\infty,$$

应用前面的注意就是

$$\sum_{j=1}^{k_n}(1-P_{nj}(\{0\}))^2\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

再次应用推论18及假定就有

$$\left\| \mathop{*}_{j=1}^{k_n} \mathscr{U}_{P_{nj}} - \mathscr{U}_E \right\| \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty,$$

又由引理19得

$$\left\| \sum_{j=1}^{k_n} P_{nj}((\cdot)\backslash\{0\}) - E \right\| \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty,$$

定理证毕。

§4. 广义$\mathscr{U}_E$型分布

22. 在Ⅰ.9中我们定义了$\mathscr{U}_E$型分布。本章定理11又证明了：$P\in\mathscr{P}_N$是$\mathscr{U}_E$型分布的充要条件是

$$P\in\mathscr{P}_{IN}, \ P(\mu:\mu(X)=0)=P(\{0\})>0.$$

这个结果完整地刻划了$\mathscr{U}_E$型分布。

余下的问题是：满足条件

$$P\in\mathscr{P}_{IN}, \qquad P(\{0\})=0$$

的无穷可分分布有怎样的形式？如果回答了这个问题，也就全部刻划了无穷可分分布。

本节与下一节的目的就在于回答这一问题。这一节先作一些准备，将$\mathscr{U}_E$型分布进一步推广。

23. 定义 设Δ是可数集(有限或可列无穷)。考虑乘积空间

$$(\mathop{\times}_{\delta\in\Delta} N_\delta, \mathop{\times}_{\delta\in\Delta} \mathbf{N}_\delta), \quad N_\delta=N, \ \mathbf{N}_\delta=\mathbf{N}, \text{ 凡}\delta\in\Delta,$$

设$\{\mu_\delta:\delta\in\Delta\}\in \mathop{\times}_{\delta\in\Delta} N$，为使$\mu=\sum_{\delta\in\Delta}\mu_\delta\in N$，必须而只须对每个$A\in\mathscr{B}$，都有

$$\sum_{\delta\in\Delta}\mu_\delta(A)<+\infty,$$

以N_Δ记全体满足上面条件的序列$\{\mu_\delta:\delta\in\Delta\}$，易知

$$N_\Delta\subset \mathop{\times}_{\delta\in\Delta} N_\delta, \quad N_\Delta\in \mathop{\times}_{\delta\in\Delta} \mathbf{N}_\delta;$$

命

$$\mathbf{N}_\Delta=(\mathop{\times}_{\delta\in\Delta} \mathbf{N}_\delta)\cap N_\Delta,$$

则映像

$$\{\mu_\delta:\delta\in\Delta\}\frown\sum_{\delta\in\Delta}\mu_\delta$$

是从$(N_\Delta,\mathbf{N}_\Delta)$到$(N,\mathbf{N})$的可测映像。

现设对每个$\delta\in\Delta$，对应一个$P_\delta\in\mathscr{P}_N$。如果

$$(\mathop{\times}_{\delta\in\Delta} P_\delta)(N_\Delta)=1,$$

则对$Y\in\mathbf{N}$命

$$(\underset{\delta\in\Delta}{*}P_\delta)(Y)=\int 1_Y(\sum_{\delta\in\Delta}\mu_\delta)(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(d\mu_\delta),$$

如此定义的 $\underset{\delta\in\Delta}{*}P_\delta\in\mathscr{P}_N$，称为 $\{P_\delta:\delta\in\Delta\}$ 的卷积。当Δ是空集时，规定这个卷积为 δ_0；当Δ为非空有限集时，这里的定义与前面的相同；当 Δ 是可列无穷集时，称 $\underset{\delta\in\Delta}{*}P_\delta$ 为无穷卷积。

必须注意，只有满足条件

$$(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(N_\Delta)=1$$

的分布族 $\{P_\delta:\delta\in\Delta\}$ 才有无穷卷积存在。这条件显然又等价于：对任意$A\in\mathscr{B}$，有

$$(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(\{\mu_\delta:\delta\in\Delta\}\in N_\Delta:\mu_\delta(A)>0\text{ 只对有限个}\delta\in\Delta\text{成立})=1.$$

24. 引理 分布族 $\{P_\delta:\delta\in\Delta\}$ 的无穷卷积存在当且仅当对任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$\sum_{\delta\in\Delta}P_\delta(\mu:\mu(A)>0)<+\infty.$$

证明 对于每个$\delta\in\Delta$，以ω_δ记柱集

$$(\{\mu_\delta:\delta\in\Delta\}:\mu_\delta(A)>0),\quad A\in\mathscr{B};$$

由Borel-Cantelli引理，$\sum_{\delta\in\Delta}P_\delta(\mu:\mu(A)>0)=\sum_{\delta\in\Delta}(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(\omega_\delta)<\infty$当且仅当：

$$(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(\limsup_{\delta\in\Delta}\omega_\delta)=0;$$

而这又等价于：

$$(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(\{\mu_\delta:\delta\in\Delta\}:\mu_\delta(A)>0\text{仅对有限个}\delta\in\Delta\text{成立})=1.$$

引理得证。

25. 引理 下面所述是无穷卷积的一些重要性质。当然我们恒假定有条件

$$(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(N_\Delta)=1.$$

1) 命$P=\underset{\delta\in\Delta}{*}P_\delta$，则

$$\Psi_P(f)=\prod_{\delta\in\Delta}\Psi_{P_\delta}(f),\qquad\text{凡}f\in\mathscr{T}_{m+};$$

事实上，如果我们将指标集Δ排成序，并以Δ_n记前n个指标，命$P_n=\underset{\delta\in\Delta_n}{\times}P_\delta$，则

$$\Psi_{P_n}(\cdot)=\prod_{\delta\in\Delta_n}\Psi_{P_\delta}(\cdot);$$

对任意的$f\in\mathscr{T}_{m+}$，有

$$\Psi_{P_n}(f)\geqslant\Psi_P(f)=\int e^{-\mu f}P(d\mu)$$

$$=\int_{N_\Delta}\exp(-\sum_{\delta\in\Delta}\mu_\delta f))(\underset{\delta\in\Delta}{\times}P_\delta)(d\mu_\delta)$$

$$\geqslant \prod_{\delta\in\Delta}\int_N e^{-\mu_\delta f}P_\delta(d\mu_\delta)=\prod_{\delta\in\Delta}\Psi_{P_\delta}(f)$$

因此得到

$$\prod_{\delta\in\Delta}\Psi_{P_\delta}(f)=\lim_{n\to\infty}\Psi_{P_n}(f)\geqslant\Psi_P(f)\geqslant\prod_{\delta\in\Delta}\Psi_{P_\delta}(f).$$

2） 以I_P记$P=\bigtimes_{\delta\in\Delta}P_\delta$的强度测度，则

$$I_P=\sum_{\delta\in\Delta}I_{P_\delta},$$

事实上，

$$I_P=\int\mu(\cdot)P(d\mu)=\int_{N_\Delta}\Big(\sum_{\delta\in\Delta}\mu_\delta\Big)(\cdot)\Big(\bigtimes_{\delta\in\Delta}P_\delta\Big)(d\mu_\delta)$$

$$=\sum_{\delta\in\Delta}\int\mu_\delta(\cdot)P_\delta(d\mu_\delta)=\sum_{\delta\in\Delta}I_{P_\delta},$$

3） 设指标集Δ又分成一些互不相交集之并

$$\Delta=\bigcup_{j\in J}\Delta_j,$$

则

$$\bigtimes_{\delta\in\Delta}P_\delta=\bigtimes_{j\in\Delta}\Big(\bigtimes_{\delta\in\Delta_j}P_\delta\Big);$$

4） 对任意的$A\in\mathscr{A}$成立：

$${}_A\Big(\bigtimes_{\delta\in\Delta}P_\delta\Big)=\bigtimes_{\delta\in\Delta}({}_AP_\delta);$$

5） 对于任意的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，有

$$\Big(\bigtimes_{\delta\in\Delta}P_\delta\Big)_{A_1,\cdots,A_m}=\bigtimes_{\delta\in\Delta}((P_\delta)_{A_1,\cdots,A_m});$$

6） 下面两个条件等价：

a） $\bigtimes_{\delta\in\Delta}P_\delta$的强度测度是局部有限的；

b） $\sum_{\delta\in\Delta}I_{P_\delta}\in N$；

上述结果都是显然的，6)可由2)推出。

26 定义 根据定理Ⅱ.61，$\mathscr{U}_E$型分布有如下性质

$$\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_{E((\cdot)\setminus\{0\})},$$

因此$\mathscr{U}_E$型分布与$\mathscr{E}_+$不是一一对应的。实际上，若设$c>0$是任意的正数，则E与$E+c\delta_0$对应同一个$\mathscr{U}_E$型分布，即

$$\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_{E+c\delta_0},$$

但是，如果我们命

$$\mathscr{E}'_+=\{E:\ E\in\mathscr{E}_+,\ E(\{0\})=0\},$$

则$\mathscr{E}'_+$与全体$\mathscr{U}_E$型分布是一一对应的（见定理11）。

为了刻划全部无穷可分分布，我们现在将 $\mathscr{E}'_+$ 进一步扩大。今后以 $\mathscr{E}_\infty$ 记N上一切满足下述条件的测度 E：

1) $E(\mu:\ \mu(A)>0)<\infty$，凡 $A\in\mathscr{B}$；

2) $E(\{0\})=0$，

显然 $\mathscr{E}'_+\subset\mathscr{E}_\infty$。当 $E\in\mathscr{E}_\infty$ 时，E 不必是有限测度，而 $\mathscr{E}'_+$ 正好是 $\mathscr{E}_\infty$ 中的全体有限测度。然而 $E\in E_\infty$ 时，E 必是 σ 有限的。事实上，设 $\{A_n\}$ 是 X 的一个分割，$A_n\in\mathscr{B}$，$n=1,2,\cdots$。命

$$Y_0=\{0\},\quad Y_1=\{\mu:\ \mu(A_1)>0\},$$

$$Y_2=\{\mu:\ \mu(A_2)>0,\ \mu(A_1)=0\};$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_n=\{\mu:\ \mu(A_n)>0,\ \mu(A_1)=\cdots=\mu(A_{n-1})=0\},$$

则 $N=\bigcup_{n=0}^{\infty}Y_n$，而且 $E(Y_n)<\infty$，凡 $n=1,2,\cdots$。

27. 引理 设对每个 $\delta\in\Delta$，$E_\delta\in\mathscr{E}'_+$。为使卷积 $\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta}$ 存在，必须而且只须 $\sum\limits_{\delta\in\Delta}E_\delta\in\mathscr{E}_\infty$。

证明 首先注意，由定理Ⅰ.61，对固定的 $A\in\mathscr{B}$，有

$$\sum_{\delta\in\Delta}\mathscr{U}_{E_\delta}(\mu:\ \mu(A)>0)=\sum_{\delta\in\Delta}\left(1-e^{-E_\delta(\mu:\mu(A)>0)}\right)$$

$$=\sum_{\delta\in\Delta}E_\delta(\mu:\ \mu(A)>0)e^{-\theta_\delta E_\delta(\mu:\mu(A)>0)},$$

其中 $0<\theta_\delta<1$，$\delta\in\Delta$。

必要性 设 $\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta}$ 存在，由Borel-Cantelli引理（见第24段最末的式子），有

$$\sum_{\delta\in\Delta}\mathscr{U}_{E_\delta}(\mu:\ \mu(A)>0)<\infty,$$

于是必有

$$c=\sup_{\delta\in\Delta}E_\delta(\mu:\ \mu(A)>0)<\infty,$$

事实上，如果上式不成立，则有 Δ 的子集 Δ' 使对每个 $\delta\in\Delta'$，都有 $\left(1-e^{-E_\delta(\mu:\mu(A)>0)}\right)>\varepsilon$，其中 ε 是某个正数。这样一来级数 $\sum\limits_{\delta\in\Delta}\mathscr{U}_{E_\delta}(\mu:\ \mu(A)>0)$ 就不收敛了。

因此我们有

$$\sum_{\delta\in\Delta}E_\delta(\mu:\ \mu(A)>0)e^{-\theta_\delta E_\delta(\mu:\mu(A)>0)}\geqslant e^{-c}\sum_{\delta\in\Delta}E_\delta(\mu:\ \mu(A)>0),$$

从而得到

$$\sum_{\delta\in\Delta}E_\delta(\mu:\ \mu(A)>0)=\Big(\sum_{\delta\in\Delta}E_\delta\Big)(\mu:\ \mu(A)>0)<\infty,\ \text{即}\sum_{\delta\in\Delta}E_\delta\in\mathscr{E}_\infty;$$

反之，如果 $\sum\limits_{\delta\in\Delta}E_\delta\in\mathscr{E}_\infty$，将上面的步骤倒推可知 $\sum\limits_{\delta\in\Delta}\mathscr{U}_{E_\delta}(\mu:\ \mu(A)>0)$ 对任意的 $A\in\mathscr{B}$

收敛，故$\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta}$存在。　　证毕。

由这个引理，我们可以将$\mathscr{U}_E$型分布的定义推广如下。

28. 定义　设$E\in\mathscr{E}_\infty$，由于E总是σ有限的，故存在$E_n\in\mathscr{E}'_+$，$n=1,2,\cdots$，使$E=\sum_n E_n$。这时由引理27，$\underset{n}{*}\mathscr{U}_{E_n}$存在，我们仍记之为

$$\mathscr{U}_E=\underset{n}{*}\mathscr{U}_{E_n},$$

并称之为广义$\mathscr{U}_E$型分布.

然而上述定义存在一个问题：当$E\in\mathscr{E}_\infty$时，表达式$E=\sum_n E_n$，$E_n\in\mathscr{E}'_+$一般并不唯一。假若E还可表为$E=\sum_n F_n$，$F_n\in\mathscr{E}'_+$，为使上述定义是不含混的，必须证明：

$$\underset{n}{*}\mathscr{U}_{E_n}=\underset{n}{*}\mathscr{U}_{F_n}.$$

下面的引理指出，我们的定义是合理的.

29. 引理　设$E\in\mathscr{E}_\infty$可表为

$$E=\sum_n E_n=\sum_n F_n,$$

其中E_n，$F_n\in\mathscr{E}'_+$，$n=1,2,\cdots$. 则

$$\underset{n}{*}\mathscr{U}_{E_n}=\underset{n}{*}\mathscr{U}_{F_n}.$$

证明　首先假定$E\in\mathscr{E}'_+$. 在此假定之下

$$\left\|E-\sum_{i=1}^{n}E_i\right\|=\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}E_i\right\|=E(N-\sum_{i=1}^{n}E_i(N),$$

因此

$$\left\|E=\sum_{i=1}^{n}E_i\right\|\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

由定理19，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\underset{i=1}{\overset{n}{*}}\mathscr{U}_{E_i}-\mathscr{U}_E\right\|=0;$$

另一方面，由于

$$\left\|\underset{i=1}{\overset{\infty}{*}}\mathscr{U}_{E_i}-\underset{i=1}{\overset{n}{*}}\mathscr{U}_{E_i}\right\|=\left\|\left(\underset{i=1}{\overset{n}{*}}\mathscr{U}_{E_i}\right)*\left(\underset{i=n+1}{\overset{\infty}{*}}\mathscr{U}_{E_i}\right)-\underset{i=1}{\overset{n}{*}}\mathscr{U}_{E_i}\right\|$$

$$\leqslant\left\|\underset{i=n+1}{\overset{\infty}{*}}\mathscr{U}_{E_i}-\delta_0\right\|\leqslant 2\underset{i=n+1}{\overset{\infty}{*}}\mathscr{U}_{E_i}(\mu:\ \mu\neq 0)$$

$$\leqslant 2\sum_{i=n+1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i}(\mu:\ \mu\neq 0)\leqslant 2\sum_{i=n+1}^{\infty}(1-e^{-E_i(N)}),$$

并且因为$E\in\mathscr{E}'_+$，$\sum_{i=1}^{\infty}E_i(N)=E(N)<+\infty$,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty}(1-e^{-E_i(N)})=0,$$

所以

$$\left\|\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i}-\mathop{*}_{i=1}^{n}\mathscr{U}_{E_i}\right\|\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

从而得到

$$\left\|\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i}-\mathscr{U}_E\right\|\leqslant\left\|\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i}-\mathop{*}_{i=1}^{n}\mathscr{U}_{E_i}\right\|$$

$$+\left\|\mathop{*}_{i=1}^{n}\mathscr{U}_{E_i}-\mathscr{U}_E\right\|\longrightarrow 0,\quad n\to\infty,$$

于是

$$\mathscr{U}_E=\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i},$$

类似可得

$$\mathscr{U}_E=\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{F_i},$$

所以当 $\sum_{i=1}^{\infty}E_i=\sum_{i=1}^{\infty}F_i=E\in\mathscr{E}'_+$时引理获证.

现设$E\in\mathscr{E}_\infty$. 由于E是σ有限的，故存在N中互不相交的集列Y_n使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n=N,\quad E(Y_n)<\infty,\quad n=1,2,\cdots;$$

由引理的假定知道对每个n，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}E_i((\cdot)\cap Y_n)=E((\cdot)\cap Y_n)=\sum_{i=1}^{\infty}F_i((\cdot)\cap Y_n),$$

前面已证得

$$\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i(\cdot)\cap Y_n)}=\mathscr{U}_{E((\cdot)\cap Y_n)}=\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{L}_{F_i((\cdot)\cap Y_n)},$$

然而由引理25的3)得到

$$\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i}=\mathop{*}_{i=1}^{\infty}(\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i((\cdot)\cap Y_n)})=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}(\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_i((\cdot)\cap Y_n)})=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E((\cdot)\cap Y_n)}$$

$$=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}(\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{F_i((\cdot)\cap Y_n)})=\mathop{*}_{i=1}^{\infty}\mathscr{U}_{F_i},$$

引理证毕。

30. 引理 如果对于每一$\delta\in\Delta$, $E_\delta\in\mathscr{E}_\infty$, 则无穷卷积$\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta}$存在，当且仅当$\sum\limits_{\delta\in\Delta}E_\delta=E\in\mathscr{E}_\infty$。这时

$$\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta}=\mathscr{U}_E.$$

证明 对于每个$\delta\in\Delta$, 由于E_δ是σ有限的，故存在指标集J_δ（有限或可数无穷），以及$E_{\delta_j}\in\mathscr{E}'_+$, $\delta_j\in J_\delta$，使$\sum\limits_{j\in J_\delta}E_{\delta_j}=E_\delta$。从而有

$$\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta}=\underset{\delta\in\Delta}{*}\left(\underset{j\in J_\delta}{*}\mathscr{U}_{\delta_j}\right),$$

由引理27，上式右边卷积存在当且仅当

$$\sum_{\delta\in\Delta}\sum_{j\in J_\delta}E_{\delta_j}\in\mathscr{E}_\infty,$$

由引理29，有

$$\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta}=\underset{\delta\in\Delta}{*}\left(\underset{j\in J_\delta}{*}\mathscr{U}_{\delta_j}\right)=\mathscr{U}_E.$$

31. 定理 广义$\mathscr{U}_E$型分布的性质。下面设$E\in\mathscr{E}_\infty$, $A, A_1, A_2, \cdots, A_m\in\mathscr{A}$，则

1) $\Psi_{\mathscr{U}_E}(f)=\exp\left(-\int(1-e^{-\mu f})E(d\mu)\right)$, 凡$f\in\mathscr{F}_{m+}$;

2) ${}_A(\mathscr{U}_E)=\mathscr{U}_{({}_AE)((\cdot)\setminus\{0\})}$;

3) $\mathscr{U}_E(\mu\colon\mu(A)<\infty)=1$当且仅当$E(\mu\colon\mu(A)>0)<\infty$，以及$E(\mu\colon\mu(A)=\infty)=0$;

4) $(\mathscr{U}_E)_{A_1,\cdots,A_m}$存在当且仅当$E_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\setminus\{0\})$存在且有限。这时

$$(\mathscr{U}_E)_{A_1,\cdots,A_m}=\mathscr{U}_{(E_{A_1,\cdots,A_m})((\cdot)\setminus\{0\})};$$

5) $\mathscr{U}_E(\mu\colon\mu(A)=0)=\exp(-E(\mu\colon\mu(A)>0))$;

6) $I_{\mathscr{U}_E}=I_E$; $I^{(2)}_{\mathscr{U}_E}=I^{(2)}_E+I_E\times I_E$; 这里$I$表示一阶矩测度，$I^{(2)}$表示二阶矩测度;

7) $\mathscr{U}_E$是简单的，当且仅当E是连续的和简单的;

8) $\mathscr{U}_E$是无后效的，当且仅当
$E(\mu\colon\mu$不是$n\delta_a$形式，$a\in X, n=0,1,2,\cdots)=0$.

证明 1) 设$E=\sum\limits_{\delta\in\Delta}E_\delta$, $E_\delta\in\mathscr{E}'_+$，由引理25的1)得

$$\Psi_{\mathscr{U}_E}(f)=\prod_{\delta\in\Delta}\Psi_{\mathscr{U}_{E_\delta}}(f)=\prod_{\delta\in\Delta}\exp\left(-\int(1-e^{-\mu f})E_\delta(d\mu)\right)$$

$$=\exp\left(-\sum_{\delta\in\Delta}\int(1-e^{-\mu f})E_\delta(d\mu)\right)=\exp\left(-\int(1-e^{-\mu f})E(d\mu)\right).$$

2) 仍设$E=\sum\limits_{\delta\in\Delta}E_\delta$, $E_\delta\in\mathscr{E}'_+$，则

$$_A(\mathscr{U}_E)={}_A(\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{E_\delta})=\underset{\delta\in\Delta}{*}({}_A\mathscr{U}_{E_\delta})=\underset{\delta\in\Delta}{*}\mathscr{U}_{{}_AE_\delta}((\cdot)\setminus\{0\})=\mathscr{U}_{({}_AE)}((\cdot)\setminus\{0\}).$$

3) **充分性** 假定$E(\mu:\mu(A)>0)<\infty$, $E(\mu:\mu(A)=\infty)=0$,则由2)及$E(\{0\})=0$有

$$(\mathscr{U}_E)(\mu:\mu(A)<\infty)=({}_A\mathscr{U}_E)(\mu:\mu\text{为有限测度})$$

$$=e^{-E(\mu:\mu(A)>0)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\{E(\mu:\mu(A)>0)\}^n=1.$$

必要性 如果$E\in\mathscr{E}_\infty$,并且$\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A)<\infty)=1$,则

$$({}_A\mathscr{U}_E)(\mu:\mu\text{为有限测度})=1,$$

所以

$$1=({}_A\mathscr{U}_E)(\mu:\mu\text{为有限测度})=e^{-E(\mu:\mu(A)>0)}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(E(\mu:0<\mu(A)<\infty))^n$$

$$=e^{-E(\mu:\mu(A)>0)}e^{+E(\mu:0<\mu(A)<\infty)},$$

从而$E(\mu:\mu(A)=\infty)=0$。

4) 如果$(\mathscr{U}_E)_{A_1,\cdots,A_m}$存在,即$(\mathscr{U}_E)(\mu:\mu(\bigcup_{i=1}^m A_i)<\infty)=1$。由3),这等价于

$E(\mu:\mu(\bigcup_{i=1}^m A_i)=\infty)=0$ 及 $E(\mu:\mu(\bigcup_{i=1}^m A_i)>0)<\infty$,而这等价于$E_{A_1,\cdots,A_m}$存在且

$E_{A_1,\cdots,A_m}$有限。

现记$A=\bigcup_{i=1}^m A_i$,则

$$(\mathscr{U}_E)_{A_1,\cdots,A_m}={}_A(\mathscr{U}_E)_{A_1,\cdots,A_m}=(\mathscr{U}_{({}_AE)})_{A_1,\cdots,A_m}$$

$$=(\mathscr{U}_{({}_AE)}((\cdot)\setminus\{0\}))_{A_1,\cdots,A_m}=\mathscr{U}_{({}_AE)_{A_1,\cdots,A_m}}((\cdot)\setminus\{0\})$$

$$=\mathscr{U}_{E_{A_1,\cdots,A_m}}((\cdot)\setminus\{0\}).$$

5) 设$A_n\uparrow A$, $A_n\in\mathscr{B}$,则

$$\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A)=0)=\lim_{n\to\infty}\mathscr{U}_E(\mu:\mu(A_n)=0)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp(-E(\mu:\mu(A_n)>0))$$

$$=\exp(-E(\mu:\mu(A)>0)).$$

6) 设$A_n\uparrow X, A_n\in\mathscr{B}$,由

$$I_{({}_{A_n}\mathscr{U}_E)}=I_{({}_{A_n}E)}$$

取极限即得$I_{\mathscr{U}_E}=I_E$;二阶矩测度的式子类似可得。

7)、8)与通常$\mathscr{U}_E$型分布的证明类似(见定理Ⅰ.63及Ⅰ.65)。

§5. 无穷可分分布的刻划(二)

32. 在§2 定理11证明了：当$P\in\mathscr{P}_N$时，如果P是无穷可分的并且$P(\{0\})>0$,那么P一定是$\mathscr{U}_E$型分布。根据引理10，如果$P(\{0\})=0$,即当$E\in\mathscr{E}'_+$时，满足$P=\mathscr{U}_E$的E是唯一的。因此下述的两个集合：

$$\{P;\ P\in\mathscr{P}_{IN},\ P(\{0\})>0\}\text{和}$$

$$\{\mathscr{U}_E;\ E\in\mathscr{E}'_+\}$$

是相同的集合。我们将证明：全体无穷可分分布与全体广义$\mathscr{U}_E$型分布也是相同的集合，即：

$$\{P;\ P\in\mathscr{P}_{IN}\}=\{\mathscr{U}_E;\ E\in\mathscr{E}_\infty\}.$$

先证明一个引理。

33. 引理 设给定了满足如下条件的测度族$\{E^A;\ A\in\mathscr{B}\}$：

1) 当$A\in\mathscr{B}$固定时，$E^A(\cdot)$是σ代数$_C\mathbf{N}$上的有限测度，其中$C\in\mathscr{B}$任意；

2) $E^A(\mu;\ \mu(A)=0)=0$，$A\in\mathscr{B}$任意；

3) 当$B\subset A$时，对任意的$Y\in\bigcup\limits_{C\in\mathscr{B}}{}_C\mathbf{N}$有

$$E^B(Y)=E^A(Y\cap(\mu;\ \mu(B)>0))；$$

则存在$\mathbf{N}$上的唯一测度$E\in\mathscr{E}_\infty$，满足：对任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$E(Y\cap(\mu;\ \mu(A)>0))=E^A(Y),\quad \text{凡}Y\in_A\mathbf{N}.$$

证明 显然，$\bigcup\limits_{C\in\mathscr{B}}{}_C\mathbf{N}$是$\mathbf{N}$的一个子代数，而且$\sigma(\bigcup\limits_{C\in\mathscr{B}}{}_C\mathbf{N})=\mathbf{N}$.固定$B\in\mathscr{B}$，由于$E^B$是$_C\mathbf{N}$上的有限测度，所以它是代数$\bigcup\limits_{C\in\mathscr{B}}{}_C\mathbf{N}$上的有限可加测度。现在我们将它扩张为$\mathbf{N}$上的测度。如果$E^B(N)=0$,这个扩张是平凡的，我们可以命$B^B(Y)=0$，凡$Y\in\mathbf{N}$.

现设$E^B(N)>0$，首先假定$E^B(N)=1$.

设有互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，命$A=\bigcup\limits_{i=1}^m A_i$。由于$E^B$是$_A\mathbf{N}$上的有限测度并且$E^B(N)=1$，所以$(E^B)_{A_1,\dots,A_m}$是$Z^m_+$上的概率分布。如此得到的概率分布族：

$$\{(E^B)_{A_1,\dots A_m}:\ A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}\text{且互不相交}\}$$

满足定理Ⅰ.13中条件1)～4)，于是存在$(N,\mathbf{N})$上的分布G^B，使得对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m$有

$$G^B_{A_1,\dots,A_m}=E^B_{A_1,\dots,A_m}$$

显然G^B确是$\bigcup\limits_{C\in\mathscr{B}}{}_C\mathbf{N}$上的有限可加测度$E^B$的扩张。

上面假定了$E^B(N)=1$，如果$E^B(N))\neq1$,则先以$(E^B(N)^{-1}E^B$取代E^B，按上面的方法

扩张以后再以$E^B(N)$乘之，所得到的扩张仍记为G^B。

现任取X中某一点，以S_k记以此点为中心半径为k的圆，$k=1,2,\cdots$。又设对每一k，都已按上面的方法作好了E^{S_k}的扩张G^{S_k}.因为当$k<j$时，对于任意的$A\in\mathscr{B}$及$Y\in_A\mathbf{N}$，有

$$G^{S_j}(Y)\geqslant G^{S_j}(Y\cap(\mu:\ \mu(S_k)>0))$$
$$=E^{S_j}(Y\cap(\mu:\ \mu(S_k)>0))=E^{S_k}(Y)=G^{S_k}(Y),$$

故若命$E=\sup_k G^{S_k}$，则E是$(N,\ \mathbf{N})$上的测度。又由条件2）知

$$E(\{0\})\leqslant\sup_k G^{S_k}(\mu:\ \mu(S_k)=0)=\sup_k E^{S_k}(\mu:\ \mu(S_k)=0)=0,$$

又因为对任意的$A\in\mathscr{B}$及$Y\in_A\mathbf{N}$有

$$E(Y\cap(\mu:\ \mu(S_j)>0))=G^{S_j}(Y)=E^{S_j}(Y),$$

取$Y=N$得$E(\mu:\ \mu(S_j)>0)=E^{S_j}(N)<\infty$。这说明$E\in\mathscr{E}_\infty$。最后，设$A\in\mathscr{B}$，取$S_j\supset A$，由条件3）得知，对任意的$Y\in_A\mathbf{N}$有

$$E(Y\cap(\mu:\ \mu(A)>0))=G^{S_j}(Y\cap(\mu:\ \mu(A)>0))$$
$$=E^{S_j}(Y\cap(\mu:\ \mu(A)>0))=E^A(Y),$$ 引理证毕。

下面的定理完满地回答了本节开首提出的问题。

34．定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则$P\in\mathscr{P}_{IN}$的充分必要条件是：

$$P=\mathscr{U}_E,\quad E\in\mathscr{E}_\infty;$$

$\mathscr{E}_\infty$到$\mathscr{P}_{IN}$的映像$E\frown\mathscr{U}_E$是一一的而且是满射的。

证明 *充分性* 设$E\in\mathscr{E}_\infty$，则存在$E_\delta\in\mathscr{E}'_+$，$\delta\in\Delta$，使得$\mathscr{U}_E=\mathop{*}\limits_{\delta\in\Delta}\mathscr{U}_{E_\delta}$。于是对于任意的$n=1,2,\cdots$，有

$$\mathscr{U}_E=\mathop{*}\limits_{\delta\in\Delta}(\mathscr{U}_{(E_\delta/n)})^n=(\mathscr{U}_{(E/n)})^n,$$

所以$\mathscr{U}_E$是无穷可分的。

必要性 设P是无穷可分分布，我们要证明：存在$E\in\mathscr{E}_\infty$，使$P=\mathscr{U}_E$.固定$B\in\mathscr{B}$，由P的无穷可分性可推出$_BP$的无穷可分性。又因为

$$(_BP)(\mu:\ \mu(X)<\infty)=P(\mu:\ \mu(B)<\infty)=1,$$

所以由推论13可知，存在$E^B\in\mathscr{E}_+$使

$$_BP=\mathscr{U}_{(E^B)}=\mathscr{U}_{(E^B)(\cdot)\setminus\{0\}};$$

如果$A\in\mathscr{B}$并且$A\supset B$，因为

$$\mathscr{U}_{(E^B)(\cdot)\setminus\{0\}}={}_BP={}_B(_AP)={}_B(\mathscr{U}_{E^A})$$
$$=\mathscr{U}_{(_BE^A)}=\mathscr{U}_{(_BE^A)(\cdot)\setminus\{0\}},$$

所以

$$E^B(\cdot)\setminus\{0\}=(_BE^A)(\cdot)\setminus\{0\};$$

因此如果命

$$E^B(Y)=E^A(Y\cap(\mu:\ \mu(B)>0)),\quad \text{凡}Y\in{}_A\mathrm{N},\ B\subset A,$$

则$\{F^B: B\in\mathscr{B}\}$满足引理33的全部条件。于是存在$E\in\mathscr{E}_\infty$使对任意$A\in\mathscr{B}$及$Y\in{}_A\mathrm{N}$有

$$E(Y\cap(\mu:\ \mu(A)>0))=F^A(Y),$$

根据前面已证的充分性，$\mathscr{U}_E$是无穷可分的，又因为

$$({}_AE)(\cdot\cap\backslash\{0\})=E^A(\cdot\cap\backslash\{0\}),\quad \text{凡}A\in\mathscr{B},$$

可知

$$ {}_AP=\mathscr{U}_{(E^A)(\cdot\cap\backslash\{0\})}=\mathscr{U}_{(A^E)(\cdot\cap\backslash\{0\})}=\mathscr{U}_{({}_AE)}={}_A(\mathscr{U}_E),\quad \text{凡}A\in\mathscr{B},$$

于是$P=\mathscr{U}_E$。

为完成定理的证明，尚需证：对任意的E，$F\in\mathscr{E}_\infty$，如果$\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_F$，则有$E=F$。实际上，当$\mathscr{U}_E=\mathscr{U}_F$时，由于

$$\mathscr{U}_{({}_AE)}={}_A(\mathscr{U}_E)={}_A(\mathscr{U}_F)=\mathscr{U}_{({}_AF)}$$

可推知

$${}_AE(\cdot\cap\backslash\{0\})={}_AF(\cdot\cap\backslash\{0\}),\quad \text{凡}A\in\mathscr{B};$$

由此易得到，对于任意的$Y\in\bigcup_{C\in\mathscr{B}}{}_C\mathrm{N}$及任意的$A\in\mathscr{B}$，有

$$E(Y\cap(\mu:\ \mu(A)>0))=F(Y\cap(\mu:\mu(A)>0)),$$

由于$\bigcup_{C\in\mathscr{B}}{}_C\mathrm{N}$是代数并且产生$\sigma$代数N，所以上式对一切$Y\in\mathrm{N}$及$A\in\mathscr{B}$都成立。

取$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$，并注意到$E(\{0\})=F(\{0\})=0$，可得

$$E(Y)=\lim_{n\to\infty}E(Y\cap(\mu:\mu(A_n)>0))=\lim_{n\to\infty}F(Y\cap(\mu:\ \mu(A_n)>0))=F(Y),$$

这说明$E=F$。定理证毕。

35. 定义 根据上面的定理，$E\frown\mathscr{U}_E$是$\mathscr{E}_\infty$到$\mathscr{P}_{IN}$上的一一映像。当$P=\mathscr{U}_E$时，我们称E是P的典则测度，并记为$\tilde{P}$。

我们可以将定理31中关于广义$\mathscr{U}_E$型分布的性质改述如下：

设 $P\in\mathscr{P}_{IN}$，$A,A_1\cdots,A_m\in\mathscr{A}$，则

1) $\Psi_P(f)=\exp\left(-\int(1-e^{-\mu f})\tilde{P}(d\mu)\right)$，$f\in\mathscr{F}_{m+}$；

2) $({}_A\tilde{P})={}_A(\tilde{P})$；

3) $P(\mu:\mu(A)<\infty)=1$当且仅当$\tilde{P}(\mu:\mu(A)>0)<\infty$，$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)=\infty)=0$；

4) $P_{A_1,\dots,A_m}$存在当且仅当$P_{A_1,\dots,A_m}$存在且有限。这时

$$(\widetilde{P_{A_1,\dots,A_m}})=(\tilde{P})_{A_1,\dots,A_m}(\cdot\cap\backslash\{0\});$$

5) $P(\mu:\ \mu(A)=0)=\exp(-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0))$。

§6. Poisson 过程

36. 定义 设P是无穷可分分布，满足

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(X)\neq 1)=0,$$

则称P是Poisson 分布。具有Poisson 分布的点过程称为Poisson 过程。

因为映像$g: a \frown \delta_a$ 是从$(X, \mathscr{A})$到$(N, \mathbf{N})$内的可测映像，所以对任意的$\lambda \in M$，如果命

$$Q_\lambda(\cdot) = \lambda g^{-1}(\cdot),$$

则Q_λ是$(N, \mathbf{N})$上的测度。

37. 引理 设$E \in \mathscr{E}_\infty$且$E(\mu: \mu(X) \neq 1) = 0$，则存在唯一的$\lambda \in M$使$E = Q_\lambda$；反之，设$\lambda \in M$，则$Q_\lambda \in \mathscr{E}_\infty$并且$Q_\lambda(\mu: \mu(X) \neq 1) = 0$。

证明 设$E \in \mathscr{E}_\infty$，$E(\mu: \mu(X) \neq 1) = 0$。命

$$\lambda(A) = E(\mu: \mu = \delta_a, a \in A), \quad A \in \mathscr{B},$$

则如此定义的λ显然属于M，并且$Q_\lambda = E$。

反之，设$\lambda \in M$，则对任意的$A \in \mathscr{B}$有

$$Q_\lambda(\mu: \mu(A) > 0) = \lambda(a: a \in X, \delta_a(A) > 0) = \lambda(A) < \infty,$$

又因为

$$Q_\lambda(\{0\}) = Q_\lambda(\mu: \mu(X) = 0) = \lambda(a: a \in X, \delta_a(X) = 0) = \lambda(\phi) = 0,$$

所以$Q_\lambda \in \mathscr{E}_\infty$，并且

$$Q_\lambda(\mu: \mu(X) \neq 1) = \lambda(a: a \in X, \delta_a(X) \neq 1) = \lambda(\phi) = 0.$$

证毕。

下面两个定理可以看作是Poisson 过程的等价定义。

38. 定理 设$P \in \mathscr{P}_N$，P是Poisson 分布的充要条件是：存在$\lambda \in M$，使$P = \mathscr{U}_{(Q_\lambda)}((\cdot) \backslash \{0\})$

证明 设$P \in \mathscr{P}_N$是Poisson分布，由定义知P是无穷可分的且$\tilde{P}(\mu: \mu(X) \neq 1) = 0$。再由引理37知道存在$\lambda \in M$，使$\tilde{P} = Q_\lambda$。

反之，如果$P = \mathscr{U}_{(Q_\lambda)}$，则$P$是无穷可分的，而且由引理37知$Q_\lambda = \tilde{P}$满足$\tilde{P}(\mu: \mu(X) \neq 1) = 0$，所以$P$是Poisson分布。

39. 定理 设$P \in \mathscr{P}_N$，则P是Poisson分布的充分必要条件是：P是无后效的，并且存在$\lambda \in M$使得对于任意的$A \in \mathscr{B}$及任意的非负整数k有

$$P(\mu: \mu(A) = k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda(A)} (\lambda(A))^k.$$

证明 设P是Poisson分布，由定义36及定理31的8)可知P是无后效的。再由定理38，知$P = \mathscr{U}_{Q_\lambda}$，其中$\lambda \in M$。

对于固定的$A \in \mathscr{B}$，$(Q_\lambda)_A$是Z_+上的测度。由于对任意的$k \in Z_+$有

$$\begin{aligned}(Q_\lambda)_A(k \backslash \{0\}) &= Q_\lambda(\mu: \mu(A) = k, \mu(A) \neq 0) \\ &= \lambda(a: a \in X, \delta_a(A) = k, \delta_a(A) \neq 0) = \lambda(A)\delta_1(k)\end{aligned}$$

所以

$$(Q_\lambda)_A(k - \{0\}) = \lambda(A)\delta_1(k),$$

这里δ_1是Z_+上的测度，满足$\delta_1(1) = 1$，$\delta_1(k) = 0 (k \neq 1)$。从而由$P = \mathscr{U}_{Q_\lambda}$推知

$$P_A=(\mathscr{U}_{Q_\lambda})_A=\mathscr{U}_{(Q_\lambda)_A}((\cdot)\backslash\{0\})$$

$$=e^{-\lambda(A)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(((Q_\lambda)_A((\cdot)\backslash\{0\}))=e^{-\lambda(A)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda(A)\delta_1)^n$$

$$=e^{-\lambda(A)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda(A))^n\delta_n,$$

因此对任意的$k\in Z_+$有:

$$P(\mu:\mu(A)=k)=P_A(k)$$

$$=e^{-\lambda(A)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\lambda(A))^n\delta_n(k)=e^{-\lambda(A)}\frac{1}{k!}(\lambda(A))^k.$$

反之，如果P无后效并且存在$\lambda\in M$使

$$P(\mu(A)=k)=\frac{1}{k!}e^{-\lambda(A)}(\lambda(A))^k,$$

对一切$A\in\mathscr{B}$及$k\in Z_+$成立。由无后效性，对于互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$及$k_1,\cdots,k_m\in Z_+$有

$$P(\mu:\mu(A_1)=k_1,\cdots,\mu(A_m)=k_m)=\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(k_j)!}e^{-\lambda(A_j)}(\lambda(A_j))^{k_j},$$

由前面第一部分的证明及$\mathscr{U}_{Q_\lambda}$的无后效性，可知$\mathscr{U}_{Q_\lambda}$的有限维分布$(\mathscr{U}_{Q_\lambda})_{A_1,\cdots,A_m}$也具有上面的形式，从而推知$P=\mathscr{U}_{Q_\lambda}$，即$P$是Poisson分布。

下面讨论Poisson分布的一些重要性质。首先注意，当$\lambda\in M$时，对任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$I_{Q_\lambda}(A)=\int\mu(A)Q_\lambda(d\mu)=\int\delta_a(A)\lambda(da)=\lambda(A),$$

所以$I_{Q_\lambda}(\cdot)=\lambda(\cdot)$。因此对于Poisson分布$P=\mathscr{U}_{Q_\lambda}$，其强度测度就是$\lambda$。为方便起见，以后我们以$P_\lambda$表示以$\lambda$为强度测度的Poisson分布，即$P_\lambda=\mathscr{U}_{Q_\lambda}$。

40．定理 Poisson分布P_λ是简单的，当且仅当λ是扩散的，即对任意的$a\in X$，$\lambda(a)=0$。

证明 由定理31的7)，分布$P_\lambda=\mathscr{U}_{Q_\lambda}$是简单的，当且仅当$Q_\lambda$是简单的和连续的。但$Q_\lambda$总是简单的，所以$P_\lambda$是简单的，当且仅当$Q_\lambda$是连续的。然而$Q_\lambda$的连续等价于对任意的$a\in X$，$I_{Q_\lambda}(a)=0$，所以根据上面的注意，得知$P_\lambda$的简单性等价于$\lambda(a)=0$对一切$a\in X$成立。

41．定理 设$\lambda\in M$，并且$\lambda(a)=0$对一切$a\in X$成立，则恰好存在一个分布$P\in\mathscr{P}_N$，使对任意的$A\in\mathscr{B}$及任意的$k\in Z_+$，有

$$P_A(k)=P(\mu:\mu(A)=k)=\frac{1}{k!}e^{-(A)}(\lambda(A))^k;$$

此时$P=P_\lambda$。

证明 由定理40，P_λ是简单的；现设P是N上的任意一个分布，满足

$$P_A(k)=\frac{1}{k!}e^{-\lambda(A)}(\lambda(A))^k=(P_\lambda)_A(k),$$

由定理Ⅱ.24知有$P=P_\lambda$。

由此结果直接推出：

42. 推论 如果$P\in\mathscr{P}_N$是连续分布，则P是Poisson分布的充要条件为：存在$\lambda\in M$，使对任意的$A\in\mathscr{B}$，P_A具有参数为$\lambda(A)$的一维Poisson分布。

证明 由条件可知$I_P(\cdot)=\lambda(\cdot)$。由于$P$是连续的，所以$I_P=\lambda$是扩散的，应用定理41即得欲证。

上面的定理40～42指出，下述三命题等价：

1) P是简单的Poisson分布；

2) P的强度测度I_P是扩散的，并且一维分布P_A是Z_+上以$I_P(A)$为参数的Poisson分布；

3) P是连续分布，它的一维分布P_A是Z_+上以$I_P(A)$为参数的Poisson分布。

在2)（或3)）中，去掉I_P为扩散（或P为连续）的条件，P就不一定是Poisson分布。很容易构造出这种例子。

43. 定理 设$\lambda\in M$，则P_λ的Laplace变换为：

$$\Psi_{P_\lambda}(f)=\exp\left\{-\int\left(1-e^{-f(a)}\right)\lambda(da)\right\},\qquad f\in\mathscr{F}_{m+}.$$

证明 由定理31的1)得

$$\Psi_{P_\lambda}(f)=\exp\left\{-\int\left(1-e^{-\mu f}\right)Q_\lambda(d\mu)=\exp\left\{-\int\left(1-e^{-f(a)}\right)\lambda(da)\right\}\right..$$

44. 定理 对任意的$c\in[0,1]$及$\lambda\in M$，有

$$\mathscr{D}_c(P_\lambda)=P_{(c\lambda)}.$$

证明 利用引理Ⅱ.69分别计算上式两边的有限维分布的概率母函数。

下面我们研究两个Poisson过程之间的相互绝对连续性与相互奇异性。

45. 引理 设ν，λ是$\mathscr{A}$上的两个有限测度并且$\nu\ll\lambda$，则$P_\nu\ll P_\lambda$。如果$f=\dfrac{d\nu}{d\lambda}$是ν相对于λ的Radon-Nikodym 导数，则P_ν相对于P_λ的Radon-Nikodym 导数$T_{\nu,\lambda}(\mu)=\dfrac{dP_\nu}{dP_\lambda}(\mu)$可以写为：

$$T_{\nu,\lambda}(\mu)=e^{\lambda(X)-\nu(X)}\prod_{a\in X,\mu(a)>0}(f(a))^{\mu(a)}.$$

证明 设$h(\mu)$是定义于$(N,\mathbf{N})$上的有界可测函数，由定理38得

$$\int h(\mu)P_\nu(d\mu)=e^{-\nu(X)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int h(\delta_{a_1}+\cdots+\delta_{a_k})\nu(da_1)\cdots\nu(da_k)$$

$$=e^{-\lambda(X)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int e^{\lambda(X)-\nu(X)}h(\delta_{a_1}+\cdots+\delta_{a_k})f(a_1)\cdots f(a_k)\lambda(da_1)\cdots\lambda(da_k)$$

$$=\int h(\mu)\,T_{\nu\lambda}(\mu)\,P_\lambda(d\mu),$$

特别取$h(\mu)=1_Y(\mu)$，$Y\in\mathbf{N}$，则

$$P_\nu(Y)=\int_Y T_{\nu,\lambda}(\mu)P_\lambda(d\mu),$$

这说明$P_\nu \ll P_\lambda$而且$\frac{dP_\nu}{dP_\lambda} = T_{\nu,\lambda}$。

46. 引理 设ν,λ是$\mathscr{A}$上的有限测度，则

$$K_\rho(P_\nu,P_\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2}(K_d(\nu,\lambda))^2\right),$$

此处$K_\rho(\cdot,\cdot)$及$K_d(\cdot,\cdot)$的定义见$I.33$。

证明 任取$\mathscr{A}$上的有限测度γ使$\nu \ll \gamma$，$\lambda \ll \gamma$。又设ν,λ相对于γ的 Radon-Nikodym 导数分别是f,g。由引理45知

$$K_\rho(P_\nu,P_\lambda) = \int\sqrt{T_{\nu,\gamma}(\mu)T_{\lambda,\gamma}(\mu)}\ P_\gamma(d\mu)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(\nu(X)+\lambda(X)-2\gamma(X))\right)\times\int\prod_{\substack{a\in X\\ \mu(a)>0}}\left(\sqrt{f(a)g(a)}\right)^{\mu(a)}\mathscr{U}_{Q_\gamma}(d\mu),$$

命

$$h(\mu) = \prod_{\substack{a\in X\\ \mu(a)>0}}\left(\sqrt{f(a)g(a)}\right)^{\mu(a)},$$

则有

$$\int h(\mu)\mathscr{U}_{Q_\gamma}(d\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-Q_\gamma(N)}\frac{1}{k!}\int h(\mu)\,Q_\gamma^k\,(d\mu)$$

$$= e^{-\gamma(X)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int h(\delta_{a_1}+\cdots+\delta_{a_k})\gamma(da_1)\cdots\gamma(da_k)$$

$$= e^{-\gamma(X)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\sqrt{f(a_1)\cdots f(a_k)g(a_1)\cdots g(a_k)}\ \gamma(d(a_1)\cdots\gamma(da_k)$$

$$= e^{-\gamma(X)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int\sqrt{f(a)g(a)}\ \gamma(da)\right)^k$$

$$= \exp\left\{\int(\sqrt{f(a)g(a)}-1)\gamma(da)\right\},$$

从而

$$K_\rho(P_\nu,P_\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int(f(a)-2\sqrt{f(a)g(a)}+g(a))\gamma(da)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int(\sqrt{f(a)}-\sqrt{g(a)})^2\gamma(da)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(K_d(\nu,\lambda)^2\right\}.$$

现设$\nu,\lambda\in M$，则对任意$A\in\mathscr{B}$，$A\nu$与$A\lambda$是有限测度，于是$K_d(A\nu,A\lambda)$存在。取$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$，我们定义

$$K_d(\nu,\lambda) = \lim_{n\to\infty}K_d(A_n\nu,A_n\lambda),$$

这样定义$K_d(\nu,\lambda)$的合理性是不成问题的。当$\gamma\in M,\nu\ll\gamma,\lambda\ll\gamma$，而$\frac{d\nu}{d\gamma}=f,\frac{d\lambda}{d\gamma}=g$时，$K_d(\nu,\lambda)$又可表为

$$K_d(\nu,\lambda)=\left(\int(\sqrt{f(a)}-\sqrt{g(a)})^2\gamma(da)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

47. 引理 设$\nu,\lambda\in M$，则有

$$2\{1-\exp(-\frac{1}{2}(K_d(\nu,\lambda))^2)\}\leqslant\|P_\nu-P_\lambda\|$$

$$\leqslant\sqrt{8\{1-\exp(-\frac{1}{2}(K_d(\nu,\lambda))^2)\}}\ .$$

证明 由引理Ⅰ.34及Ⅰ.35推出：

$$(K_d(P_\nu,P_\lambda))^2\leqslant\|P_\nu-P_\lambda\|\leqslant 2K_d(P_\nu,P_\lambda),$$

又因为

$$(K_d(P_\nu,P_\lambda))^2=2(1-K_\rho(P_\nu,P_\lambda)),$$

于是当ν,λ是有限测度时，由引理46得到

$$2\{1-\exp(-\frac{1}{2}(K_d(\nu,\lambda))^2)\}\leqslant\|P_\nu-P_\lambda\|$$

$$\leqslant\sqrt{8\{1-\exp(-\frac{1}{2}(K_d(\nu,\lambda))^2)\}}\ ,$$

现设$\nu,\lambda\in M$，由定理3的2)，对于$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$有

$$\|P_\nu-P_\lambda\|=\lim_{n\to\infty}\|_{A_n}P_\nu-{}_{A_n}P_\lambda\|=\lim_{n\to\infty}\|P_{(A_n\nu)}-P_{(A_n\gamma)}\|$$

再根据$L_d(\nu,\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}K_d(A_n\nu,A_n\lambda)$即得欲证之不等式。

48. 注记 根据引理16，当ν,λ为有限测度时，还可得到

$$\|P_\nu-P_\lambda\|=\|\mathscr{U}_{Q_\nu}-\mathscr{U}_{Q_\lambda}\|\leqslant 2\|Q_\nu-Q_\lambda\|=2\|\nu-\lambda\|,$$

下面我们举例说明，引理47比上述结果好得多。

设(X,ρ_X)是数直线，ν是Lebesgue 测度。命

$$\nu_n=\nu((\cdot)\cap[0,n]),\qquad \lambda_n=(1+n^{-1})\nu_n,$$

如果应用上面根据引理16导出的不等式，则

$$\|P_{\nu_n}-P_{\lambda_n}\|\leqslant 2,$$

但如果应用引理47，则当$n\to\infty$时有

$$\|P_{\nu_n}-P_{\lambda_n}\|\leqslant\sqrt{8\{-\exp(-\frac{1}{2}\int_0^n(1-\sqrt{1+n^{-1}})^2\nu(dx))\}}\longrightarrow 0.$$

下述定理是Kakutani 定理的一个直接应用，是关于Poisson 过程的一个重要结果。

49. 定理 设$\nu,\lambda\in M$，则

1) $P_\nu\perp P_\lambda$ 当且仅当$K_d(\nu,\lambda)=+\infty$；
2) $P_\nu\ll P_\lambda$ 当且仅当$\nu\ll\lambda$并且$K_d(\nu,\lambda)<\infty$，
3) $P_\nu\sim P_\lambda$ 当且仅当$\nu\sim\lambda$并且$K_d(\nu,\lambda)<\infty$。

证明 设$A_1,A_2\cdots,A_n,\cdots$是$\mathscr{B}$中一列互不相交的集合，满足$\bigcup\limits_n A_n=X$。命

$$\nu_n=A_n\nu,\qquad \lambda_n=A_n\lambda,$$

又命

$$N_n=\{A_n\mu:\ \mu\in N\},\qquad \mathbf{N}_n=N_n\cap\mathbf{N},$$

考虑乘积空间$(\bigtimes_n N_n,\ \bigtimes_n \mathbf{N}_n)$上的乘积测度$\bigtimes_n P_{\nu_n}$和$\bigtimes_n P_{\lambda_n}$。由于Poisson过程的无后效性，得知

$P_\nu\perp P_\lambda$ 当且仅当$\bigtimes_n P_{\nu_n}\perp\bigtimes_n P_{\lambda_n}$；

$P_\nu\ll P_\lambda$ 当且仅当$\bigtimes_n P_{\nu_n}\ll\bigtimes_n P_{\lambda_n}$，

由引理46及定理Ⅰ.39得

$$K_P(P_\nu,P_\lambda)=\prod_n K_P(P_{\nu_n},P_{\lambda_n})=\prod_n \exp\left(-\frac{1}{2}(K_d(\nu_n,\lambda_n))^2\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_n(K_d(\nu_n,\lambda_n))^2\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}(K_d(\nu,\lambda))^2\right),$$

从而由定理Ⅰ.39，得知

$P_\nu\perp P_\lambda$ 当且仅当$K_d(\nu,\lambda)=\infty$；而$P_\nu\ll P_\lambda$ 当且仅当$K_d(\nu,\lambda)<\infty$及$\nu\ll\lambda$，证毕。

§7. Gauss-Poisson过程

50. 定义 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$，并且满足

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(X)>2)=0,$$

则称P是Gauss-Poisson分布，简记为G-P分布。

对于G-P分布P，如果记

$$N_1=(\mu:\ \mu(X)=1),\quad N_2=(\mu:\ \mu(X)=2),$$

并命

$$\tilde{P}_1(\cdot)=\tilde{P}((\cdot)\cap N_1),\quad \tilde{P}_2(\cdot)=\tilde{P}((\cdot)\cap N_2),$$

则$\tilde{P}=\tilde{P}_1+\tilde{P}_2$。于是$P$可以写为卷积形式

$$P=\mathscr{U}_{\tilde{P}}=\mathscr{U}_{\tilde{P}_1}*\mathscr{U}_{\tilde{P}_2},$$

其中$\mathscr{U}_{\tilde{P}_1}$显然是以$\tilde{P}_1$为典则测度的Poisson过程。

如果将N_2分解为

$$N_2'=(\mu:\ \mu=2\delta_a,\ a\in X),$$

$$N_2''=(\mu:\ \mu=\delta_a+\delta_b,\ a\in X,b\in X,\ a\neq b),$$

则$N_2=N_2'\cup N_2''$，$N_2'\cap N_2''=\phi$，并命

$$\tilde{P}_2'(\cdot)=\tilde{P}_2((\cdot)\cap N_2'),\quad \tilde{P}_2''(\cdot)=\tilde{P}_2((\cdot)\cap N_2''),$$

则 $\tilde{P}=\tilde{P}_1+\tilde{P}_2'+\tilde{P}_2''$从而，

$$P=\mathscr{U}_{\tilde{P}_1} * \mathscr{U}_{\tilde{P}'_2} * \mathscr{U}_{\tilde{P}''_2} \tag{*}$$

若以D记$X\times X$的对角线，即$D=((a,a):a\in X)$，又设g_1,g_2分别是从$X,X\times X$到N_1,N_2的映象：

$$g_1(a)=\delta_{a_1},\quad g_2(a,b)=\delta_a+\delta_b$$

则

$$g_1^{-1}(N_1)=X,\quad g_2^{-1}(N_2')=D,\quad g_2^{-1}(N_2'')=X\times X\backslash D.$$

称$(X\times X,\mathscr{A}\times\mathscr{A})$上的测度$G$为对称的，如果对于任意的$A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{A}$有

$$G(A\times B)=G(B\times A).$$

下面的定理刻划G-P分布。

51． 定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则P是G-P分布当且仅当P的Laplace变换具有如下形式：

$$-\log\Psi_P(f)=\int(1-e^{-f(a)})\gamma_1(da)$$
$$+\iint(1-e^{-f(a)-f(b)})\gamma_2(da\times db),\quad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

其中$\gamma_1\in M$；γ_2是$(X\times X,\mathscr{A}\times\mathscr{A})$上的局部有限对称测度，而且对任意的$A\in\mathscr{B}$，$\gamma_2(A\times X)<\infty$。

证明 必要性 设P是G-P分布，由引理31的1)得

$$\Psi_P(f)=\exp(-\int(1-e^{-\mu f})\tilde{P}(d\mu)),\quad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

又因为$\tilde{P}=\tilde{P}_1+\tilde{P}_2$得

$$-\log\Psi_P(f)=\int(1-e^{-\mu f})\tilde{P}_1(d\mu)+\int(1-e^{-\mu f})\tilde{P}_2(d\mu),\quad f\in\mathscr{F}_{m+}.$$

命

$$\gamma_1(A)=\tilde{P}_1(\mu:\ \mu=\delta_a,\ a\in A),\quad A\in\mathscr{A};$$
$$\gamma_2(A\times A)=\tilde{P}_2(\mu:\mu=\delta_a+\delta_b,\ (a,b)\in A\times A),\quad A\in\mathscr{A};$$
$$\gamma_2(A\times B)=\frac{1}{2}\tilde{P}_2(\mu:\mu=\delta_a+\delta_b,\ a\in A,b\in B),\ A\cap B=\phi,\ A,B\in\mathscr{A}.$$

容易见到，$\gamma_2(\cdot)$可以扩张为$(X\times X,\mathscr{A}\times\mathscr{A})$上的对称测度，并且我们有

$$\tilde{P}_1=\gamma_1 g_1^{-1},\qquad \tilde{P}_2=\gamma_2 g_2^{-1},$$

从而

$$-\log\Psi_P(f)=\int(1-e^{-f(a)})\gamma_1(da)$$
$$+\iint(1-e^{-f(a)-f(b)})\gamma_2(da\times db),\quad f\in\mathscr{F}_{m+};$$

并且对任意的$A\in\mathscr{B}$，有

$$\gamma_2(A\times X)=\gamma_2(A\times A)+\gamma_2(A\times A^c)$$
$$=\tilde{P}_2(\mu:\mu=\delta_a+\delta_b,\ (a,b)\in A\times A)+\frac{1}{2}\tilde{P}_2(\mu:\mu=\delta_a+\delta_b,\ (a,b)\in A\times A^c)$$
$$\leqslant\tilde{P}(\mu:\mu(A)>0)<\infty.$$

充分性 现设$P\in\mathscr{P}_N$，而且P的Laplace变换有定理所述的形式。令

$$\tilde{P}_1 = \gamma_1 g_1^{-1}, \qquad \tilde{P}_2 = \gamma_2 g_2^{-1}, \quad \tilde{P} = \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2,$$

则有

$$-\log \Psi_P(f) = \int (1 - e^{-\mu f}) \tilde{P}_1(d\mu) + \int (1 - e^{-\mu f}) \tilde{P}_2(d\mu)$$

$$= \int (1 - e^{-\mu f}) \tilde{P}(d\mu), \quad f \in \mathscr{F}_{m+},$$

从而P与$\mathscr{U}_{\tilde{P}}$具有相同的Laplace变换，因此$P = \mathscr{U}_{\tilde{P}}$.又容易看出：

$$\tilde{P}(\mu: \mu(X) > 2) = 0,$$

所以P是$G\text{-}P$分布。

52. 定理 设$P \in \mathscr{P}_N$,则P是$G\text{-}P$分布当且仅当P的Laplace变换具有如下形式：

$$-\log \Psi_P(f) = \int (1 - e^{-f(a)}) \lambda(da)$$

$$- \iint (1 - e^{-f(a)})(1 - e^{-f(b)}) H(da \times db), \quad f \in \mathscr{F}_{m+},$$

其中$\lambda \in M$,H是$(X \times X, \mathscr{A} \times \mathscr{A})$上的局部有限对称测度，满足条件

$$H(A \times B) \leqslant \frac{1}{2} \min(\lambda(A), \lambda(B)), \quad A, B \in \mathscr{B}.$$

证明 对于定理51中的γ_1，γ_2，命

$$\lambda(\cdot) = \gamma_1(\cdot) + \gamma_2((\cdot) \times X) + \gamma_2(X \times (\cdot));$$

$$H(\cdot) = \gamma_2(\cdot),$$

则对任意的$A, B \in \mathscr{B}$,有：

$$H(A \times B) \leqslant \gamma_2(A \times X) \leqslant \frac{1}{2} \lambda(A);$$

再由

$$\iint (1 - e^{-f(a)})(1 - e^{-f(b)}) H(da \times db)$$

$$= 2 \int (1 - e^{-f(a)}) H(da \times X) - \iint (1 - e^{-f(a) - f(b)}) H(da \times db)$$

可见定理51中的Ψ_P表达式与本定理中所述的表达式是一致的。证毕。

一般说来，$G\text{-}P$分布不一定是无后效的，这一点与Poisson分布不同。一个很特殊的情况是：$G\text{-}P$分布P无后效的充分必要条件是定义50中的(*)式变为

$$P = \mathscr{U}_{\tilde{P}_1} * \mathscr{U}_{\tilde{P}'_2}.$$

§8. 正则无穷可分分布

53. 定义 设$P \in \mathscr{P}_{IN}$,满足

$$\tilde{P}(\mu: \mu(X) = \infty) = 0,$$

则称P是正则无穷可分分布。

设P是正则无穷可分分布，记

$$N_k = \{\mu: \mu(X) = k\}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

并命

$$\tilde{P}_k(\cdot)=\tilde{P}(N_k\cap(\cdot)),\quad k=1,2,\cdots,$$

则 $\tilde{P}=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{P}_k$，从而

$$\mathscr{U}_{\tilde{P}}=\mathop{*}_{k=1}^{\infty}\mathscr{U}_{\tilde{P}_k}.$$

我们以X^k记X的k次乘积，其中由开集产生的σ代数记为$\mathscr{A}^k$，而将全体有界 Borel 集记为$\mathscr{B}^k$。

称$\mathscr{A}^k$上的测度G是完全对称的，如果对任意的A_1，$\cdots$，$A_k\in\mathscr{A}$以及（1，2，$\cdots$，k）的任意排列（$j_1,\cdots,j_k$）有

$$G(A_1\times\cdots\times A_k)=G(A_{j_1}\times\cdots\times A_{j_k}).$$

现在我们将N_k进一步分解。设j是不超过k的正整数，记

$$N_{kj}=\{\mu:\ \mu\in N_k,\ \mu\text{有}j\text{个不同的原子}\},$$

则有$N_k=\bigcup_{j=1}^{k}N_{kj}$.

下述定理刻划了正则无穷可分分布。

54． 定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则P是正则无穷可分分布的充分必要条件为：

$$-\log_P\Psi(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\Big(1-\exp\Big(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)\Big)\Big)\gamma_k\ (da_1\times\cdots\times da_k),$$

凡$f\in\mathscr{F}_{m+}$，其中γ_k 是（X^k，$\mathscr{A}^k$）上的完全对称局部有限测度，满足条件：对任意$A\in\mathscr{B}$，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\ (X^k\backslash(A^c)^k)<\infty,$$

这里A^c是A的余集，$(A^c)^k$表示A^c的k次乘积集。

证明 必要性 任一$\mu\in N_{kj}$有j个不同的原子，将它们以适当的方式排成

$$Z_1(\mu),\ Z_2(\mu),\cdots,Z_j(\mu)$$

可使得变换$\mu\frown Z_s(\mu)$对任意k,j,s，$s\leqslant j\leqslant k$是N_{kj}至X的可测变换。这时如果$\mu=k_1\delta_{Z_1(\mu)}+\cdots+k_j\delta_{Z_j(\mu)}$则定义$\varphi_k$为：

$$\varphi_k(\mu)=(\underbrace{Z_1(\mu),\cdots,Z_1(\mu)}_{k_1\text{个}},\cdots,\underbrace{Z_j(\mu),\cdots,Z_j(\mu)}_{k_j\text{个}})\in X^k,$$

φ_k是N_k到X^k的可测变换 令γ_k为测度$\tilde{P}_k\varphi_k^{-1}(\cdot)$的对称化，则

$$-\log \Psi_P(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\int(1-e^{-\mu f})\tilde{P}_k(d\mu),\ f\in\mathscr{F}_{m+},$$

利用积分变换得：

$$-\log \Psi_P(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\left(1-\exp\left(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)\right)\right)\gamma_k\ (da_1\times\cdots\times da_k),$$

又因为

$$\gamma_k\ (X^k\setminus(A^c)^k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\gamma_k(A^j\times(A^c)^{k-j})$$

$$=\tilde{P}(\mu:\mu(A)>0)<\infty,$$

必要性得证。

充分性 现设$P\in\mathscr{P}_N$，P的Laplace变换具有定理中所述的形式。对于$k\geqslant1$，令g_k是X^k到N_k的映像：

$$g_k\ (a_1,\cdots,a_k)=\delta_{a_1}+\cdots+\delta_{a_k},\ (a_1,\cdots,a_k)\in X^k;$$

并命

$$\tilde{P}_k=\gamma_k\ g_k^{-1},\ k=1,2,\cdots,$$

$$\tilde{P}=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{P}_k,$$

则显然$\tilde{P}(0)=0$，且因为对任意的$A\in\mathscr{B}$，有

$$\tilde{P}(\mu:\mu(A)>0)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\ (X^k\setminus(A^c)^k)<\infty,$$

所以$\tilde{P}\in\mathscr{E}_\infty$，此时定理中$\Psi_P(f)$的表达式化为：

$$-\log \Psi_P(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\int(1-e^{-\mu f})\tilde{P}_k(d\mu),\quad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

从而P与$\mathscr{U}_{\tilde{P}}$具有相同的Laplace变换，$P=\mathscr{U}_{\tilde{P}}$，故知$P$是无穷可分的。容易验证

$$\tilde{P}(\mu:\mu(X)=\infty)=0,$$

即P是正则无穷可分分布。

55. 引理 设k,j是正整数，$k\leqslant j$，则

$$\sum_{n=k}^{j}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{j}{n}=\begin{cases}1, & 当j=k,\\ 0, & 当j>k.\end{cases}$$

证明 因为

$$\sum_{n=k}^{j}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{j}{k}=\sum_{n=k}^{j}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{j!}{n!(j-n)!}$$

$$=\sum_{n=k}^{j}(-1)^{n-k}\frac{j!}{k!(j-k)!}\frac{(j-k)!}{(n-k)!(j-n)!}$$

$$=\sum_{n=k}^{j}(-1)^{n-k}\binom{j}{k}\binom{j-k}{n-k}=\binom{j}{k}\sum_{i=0}^{j-k}(-1)^{i}\binom{j-k}{i}$$

$$=\binom{j}{k}(1-1)^{j-k}。$$ 得证

56. 引理 设H_k是$(X^k,\mathscr{A}^k)$上的完全对称测度，满足条件：对任意的$A\in\mathscr{B}$，$H_k(A\times X^{k-1})<\infty$，则对任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$(-1)^{k-1}H_k(A^k)=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\binom{k}{n}H_k((X^n\backslash(A^c)^n)\times X^{k-n}).$$

证明 记A^c为B。首先注意，对$A\in\mathscr{B}$有

$$X^n\backslash B^n\subset(A\times X^{n-1})\cup(X\times A\times X^{n-2})\cup\cdots\cup(X^{n-1}\times A),$$

$$H_k((X^n\backslash B^n)\times X^{k-n})\leqslant nH_k(A\times X^{k-1})<\infty,$$

因此引理中等式右边各项都是有限的。又由H_k的完全对称性可知：对于$1\leqslant n\leqslant k$，

$$H_k((X^n\backslash B^n)\times X^{k-n})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-n}\binom{n}{j}\binom{k-n}{i}H_k(A^{i+j}\times B^{k-i-j}),$$

于是

$$\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\binom{k}{n}H_k((X^n\backslash B^n)\times X^{k-n})$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-n}\binom{k}{n}\binom{n}{j}\binom{k-n}{i}H_k(A^{i+j}\times B^{k-i-j}),$$

考虑上式右边$H_k(A^s\times B^{k-s})$的系数，其中s是不超过k的正整数，得：

$$\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\0\leq i\leq k-n\\i+j=s}}\binom{k}{n}\binom{n}{j}\binom{k-n}{i}$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\sum_{j=\max(1,n+s-k)}^{\min(n,s)}\binom{k}{n}\binom{n}{j}\binom{k-n}{s-j}$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\sum_{j=\max(1,n+s-k)}^{\min(n,s)}\frac{k!}{n!(k-n)!}\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(k-n)!}{(n-j)!(k-n-s+j)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\sum_{j=\max(1,n+s-k)}^{\min(n,s)}\frac{k!}{s!(k-s)!}\frac{s!}{j!(s-j)!}\frac{(k-s)!}{(n-j)!(k-s-n+j)!}$$

$$=\binom{k}{s}\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}\sum_{j=\max(1,n+s-k)}^{\min(n,s)}\binom{s}{j}\binom{k-s}{n-j}$$

$$=\binom{k}{s}\sum_{j=1}^{s}\binom{s}{j}\sum_{n=j}^{k-s+j}(-1)^{k-n}\binom{k-s}{n-j}=\binom{k}{s}\sum_{j=1}^{s}\binom{s}{j}\sum_{i=0}^{k-s}(-1)^{k-i+j}\binom{k-s}{i}$$

$$=\binom{k}{s}\sum_{j=1}^{s}\binom{s}{j}(-1)^{j}\sum_{i=0}^{k-s}(-1)^{k-i}\binom{k-s}{i}=\begin{cases}(-1)^{k-1}, & 当s=k\\ 0, & 当1\leqslant s<k.\end{cases}$$

由此即可得证引理中的等式。

57. 定义 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$，称P是n-正则无穷可分分布，如果

$$\widetilde{P}(\mu:\ \mu(X)>n)=0.$$

按照这个定义，Poisson分布是1-正则无穷可分分布，G-P分布是2-正则无穷可分分布。任何的n-正则无穷可分分布都是正则无穷可分分布。对于n-正则无穷可分分布，定理54中的γ_k满足条件：

$$\gamma_k=0,\quad k>n.$$

下面的定理将定理52推广到n-正则无穷可分分布。

58. 定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则P是n-正则无穷可分分布，当且仅当P的Laplace变换为：

$$\log\Psi_P(f)=\sum_{j=1}^{n}\int\prod_{i=1}^{j}(e^{-f(a_i)}-1)H_j(da_1\times\cdots\times da_j),\ f\in\mathscr{T}_{m+},$$

其中$H_j(1\leqslant j\leqslant n)$满足条件：$H_j$是$(X^j,\mathscr{A}^j)$上的局部有限完全对称测度，而对任意的$k$，$1\leqslant k\leqslant n$，以及任意的$A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{B}$，有

$$0\leqslant\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}H_j(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{j-k})<\infty.$$

证明 *必要性* 设P是n-正则的无穷可分分布，取定理54中的$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$($\gamma_k=0$，当$k>n$)。我们令

$$H_k(A_1\times\cdots\times A_k)=\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}\gamma_j(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{j-k}),$$

其中$1\leqslant k\leqslant n$，显然H_k是$(X^k,\mathscr{A}^k)$上的局部有限完全对称测度，因为

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}H_j(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{j-k})$$

$$=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\gamma_i(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{i-k})$$

$$= \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=k}^{i} (-1)^{j-k}\binom{j}{k}\binom{i}{j}\gamma_i(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{i-k}),$$

由引理55，上式右边为$\gamma_k(A_1\times\cdots\times A_k)$，所以

$$0\leqslant \sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}H_j(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{j-k})=\gamma_k(A_1\times\cdots\times A_k)<\infty;$$

现在对于任意的$f\in\mathscr{T}_{m+}$，由定理54及上面的式子可得：

$$\log\Psi_P(f)=\sum_{k=1}^{n}\int\Bigl(\exp\Bigl(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)\Bigr)-1\Bigr)\gamma_k(da_1\times\cdots\times da_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\int\Bigl(\exp\Bigl(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)\Bigr)-1\Bigr)H_j(da_1\times\cdots\times da_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\Bigl(\exp\Bigl(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)\Bigr)-1\Bigr)H_j(da_1\times\cdots\times da_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\int\prod_{i=1}^{j}(\exp(-f(a_i))-1)H_j(da_1\times\cdots\times da_j),$$

必要性得证。

充分性　现设$P\in\mathscr{P}_N$，而且$\Psi_P(\cdot)$具有定理中所述的形式。对任意的$A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{B}$，$1\leqslant k\leqslant n$，令

$$\gamma_k(A_1\times\cdots\times A_k)=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}H_j(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{j-k}),$$

将γ_k扩张为$(X^k,\mathscr{B}^k)$上的测度，容易验证γ_k满足定理54中的条件。将上面必要性证明中的过程倒推，就得

$$\log\Psi_P(f)=\sum_{k=1}^{n}\int\Bigl(\exp\Bigl(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)\Bigr)-1\Bigr)\gamma_k(da_1\times\cdots\times da_k),$$

由定理54知，P是n－正则无穷可分分布。

由定理54及58，可以得如下的公式。

59．推论　设P是n－正则无穷可分分布，γ_k，H_k，$(1\leqslant k\leqslant n)$如定理54及58所示，则对任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$\widetilde{P}(\mu:\mu(A)>0)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(X^k\setminus(A^c)^k)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}H_k(A^k).$$

证明　由γ_k的定义，上式中的第一个等号是显然的，又由定理58证明中的必要性部分可知：

$$H_k(A_1\times\cdots\times A_k)=\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}\gamma_j(A_1\times\cdots\times A_k\times X^{j-k}),\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

因此对任意的$A\in\mathscr{B}$，有

$$H_k(A\times X^{k-1})=\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}\gamma_j(A\times X^{j-1})<\infty,$$

从而H_k满足引理56的条件。因此由引理56得：

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(X^k\backslash(A^c)^k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}H_j((X^k\backslash(A^c)^k)\times X^{j-k})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}H_j((X^k\backslash(A^c)^k)\times X^{j-k})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}H_j(A^j).$$

在结束本节之前，我们从另外一个角度给正则无穷可分分布一个有用的判别法则。为此，须要介绍两个一般的引理。

60．引理 设P，$Q\in\mathscr{P}_N$，$A\in\mathscr{A}$，记

$$Y_0=\{\mu:\mu(A)=0\},$$

如果$P(Y_0)>0,Q(Y_0)>0$，令

$$P_1(\cdot)=P(\cdot|Y_0),\quad Q_1(\cdot)=Q(\cdot|Y_0),$$

则

$$P_1*Q_1(\cdot)=P*Q(\cdot|Y_0).$$

证明 由于

$$(P*Q)(Y_0)=P\times Q((\mu_1,\mu_2):(\mu_1+\mu_2)(A)=0)=P(Y_0)Q(Y_0),$$

所以对于$Y\in\mathbf{N}$有：

$$(P*Q)(Y|Y_0)=\frac{(P*Q)(Y\cap Y_0)}{P(Y_0)Q(Y_0)}$$

$$=\frac{P\times Q((\mu_1,\mu_2):\ \mu_1+\mu_2\in Y,\ \mu_1(A)=\mu_2(A)=0)}{P(Y_0)Q(Y_0)}$$

$$=P_1\times Q_1((\mu_1,\mu_2):\ \mu_1+\mu_2\in Y)=P_1*Q_1(Y).$$

61．引理 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$，$A\in\mathscr{A}$，$P(\mu:\mu(A)=0)>0$，则$P(\cdot|Y_0)\in\mathscr{P}_{IN}$，其中$Y_0=\{\mu:\mu(A)=0\}$．而且

$$\widetilde{P(\cdot|Y_0)}=\tilde{P}((\cdot)\cap Y_0),$$

方程

$$P=P(\cdot|Y_0)*Q$$

存在唯一解$Q\in\mathscr{P}_{IN}$使

$$\tilde{Q}(\cdot)=\tilde{P}((\cdot)\cap Y_0^c),$$

其中$Y_0^c=\{\mu:\mu(A)>0\}=N\backslash Y_0$。

证明 由引理60，以及$P\in\mathscr{P}_{IN}$得知：

$$P(\cdot|Y_0)=(\sqrt[n]{P}(\cdot|Y_0))^n,$$

故$P(\cdot|Y_0)\in\mathscr{P}_{IN}$．

现设

$$E_1=\tilde{P}((\cdot)\cap Y_0),\qquad E_2=\tilde{P}((\cdot)\cap Y_0^c),$$

则E_1，$E_2\in\mathscr{E}_\infty$，$E_1+E_2=\tilde{P}$。于是存在P_1，$P_2\in\mathscr{P}_{IN}$，使$\tilde{P}_1=E_1$，$\tilde{P}_2=E_2$，$P=P_1*P_2$。但是

$$P_1(\mu;\ \mu(A)=0)=e^{-\tilde{P}_1(\mu:\ \mu(A)>0)}=1,$$

所以

$$P_1(\cdot|Y_0)=P_1(\cdot);$$

又

$$P_2(\mu;\ \mu(X)=0)=e^{-\tilde{P}_2(\mu:\ \mu(X)>0)}=e^{-E_2(\mu:\ \mu(X)>0)}=P_2(\mu;\ \mu(A)=0),$$

此即

$$P_2(\mu;\ \mu(A)=0,\ \mu(X)>0)=0,$$

这说明$P_2(\cdot|Y_0)=\delta_0$。再次应用引理60得：

$$P(\cdot|Y_0)=(P_1*P_2)(\cdot|Y_0)=P_1(\cdot|Y_0)*P_2(\cdot|Y_0)=P_1*\delta_0=P_1,$$

所以

$$\widetilde{P(\cdot|Y_0)}=\tilde{P}_1=E_1=\tilde{P}((\cdot)\cap Y_0).$$

62. 定理 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$，$A_k\uparrow X, A_k\in\mathscr{B}$。则$P$是正则无穷可分分布的充分必要条件为：对任意的$k\geqslant1$有：

$$\lim_{n,m\to\infty}P(\mu;\ \mu(A_k)=0|\mu(A_m\backslash A_n)=0)=P(\mu;\ \mu(A_k)=0).$$

证明 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$，且$\tilde{P}(\mu;\ \mu(X)=\infty)=0$。又设$k\geqslant1$固定。因为对于任意的$m$，$n$，$m>n$有

$$P(\mu;\ \mu(A_m\backslash A_n)=0)>0,$$

故可令

$$P_1(\cdot)=P(\cdot|\mu(A_m\backslash A_n)=0).$$

由引理61，存在唯一的$P_2\in\mathscr{P}_{IN}$使

$$P=P_1*P_2.$$

记

$$_{A_k}\|P_1-P\|=\|_{A_k}P_1-{}_{A_k}P\|,$$

则

$$_{A_k}\|P_1-P\|={}_{A_k}\|P_1-P_1*P_2\|$$
$$\leqslant\|\delta_0-{}_{A_k}P_2\|=(\delta_0-{}_{A_k}P_2)^+(N)+(\delta_0-{}_{A_k}P_2)^-(N)$$
$$=2({}_{A_k}P_2)(\mu;\ \mu(X)\neq0)=2P_2(\mu;\ \mu(A_k)>0)$$
$$=2(1-e^{-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(A_m\backslash A_n)>0)})$$
$$\leqslant2(1-e^{-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(X\backslash A_n)>0)}),$$

注意到$(\mu;\ \mu(X\backslash A_n)>0)\downarrow(\mu;\ \mu(X)=\infty)$且，

$$\tilde{P}(\mu;\ \mu(X)=\infty)=0,$$

可知对于任意的$\varepsilon>0$，当n充分大时有：

$$_{A_k}\|P_1-P\|<\varepsilon,$$

即有

$$|P(\mu:\ \mu(A_k)=0|\mu(A_m\backslash A_n)=0)-P(\mu:\ \mu(A_k)=0)|<\varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{n,m\to\infty} P(\mu:\ \mu(A_k)=0|\mu(A_m\backslash A_n)=0)=P(\mu:\ \mu(A_k)=0);$$

反之，如果上式成立，由引理61及定理31的5)可知：

$$P(\mu:\ \mu(A_k)=0|\mu(A_m\backslash A_n)=0)=\exp(-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(A_m\backslash A_n)=0)),$$

以及

$$P(\mu:\ \mu(A_k)=0)=\exp(-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0)),$$

从而可推知，对$\varepsilon>0$，存在$n_0>0$使当$m>n\geqslant n_0$时，

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(A_m\backslash A_n)>0)<\varepsilon,$$

固定$n\geqslant n_0$而令$m\to\infty$则

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(X\backslash A_n)>0)\leqslant\varepsilon,\ n\geqslant n_0,$$

但因为对$n\geqslant n_0$有：

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(X)=\infty)\leqslant\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(X\backslash A_n)>0)\leqslant\varepsilon,$$

所以对任意的$k\geqslant1$都有：

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(X)=\infty)=0,$$

从而最后得到：

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(X)=\infty)=\lim_{k\to\infty}\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k)>0,\ \mu(X)=\infty)=0,$$

即P是正则无穷可分分布。

由于这个结果，我们直接得到下面的推论。

63. 推论 如果$P\in\mathscr{P}_{IN}$且P无后效，则P必是正则无穷可分分布。

这结果也可由定理31的8)直接推出。

设$P\in\mathscr{P}_{IN}$,采用定义53中的记号，令

$$N_n'=\{\mu:\ \mu=n\delta_a,\ a\in X\}$$

则由定理31的8)知，$P\in\mathscr{P}_{IN}$是无后效的当且仅当P可以表成形式

$$P=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}\ \tilde{P}_n'$$

其中$\tilde{P}_n'(\cdot)=\tilde{P}\ (N_n'\cap(\cdot))$.具有这种形式的分布称为广义Poisson分布。因此，无穷可分分布P是无后效的当且仅当P是广义Poisson分布。

§9. 奇异无穷可分分布

64. 定义 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$,满足

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(X)<\infty)=0,$$

则称P是奇异无穷可分分布。

现设$P\in\mathscr{P}_{IN}$,且令

$$N_\infty = \{\mu:\ \mu(X) = \infty\},$$
$$N_n = \{\mu:\ \mu(X) = n\},\quad 1 \leqslant n < \infty,$$

并命

$$\tilde{P}_\infty(\cdot) = \tilde{P}((\cdot) \cap N_\infty),$$
$$\tilde{P}_n(\cdot) = \tilde{P}((\cdot) \cap N_n),\quad 1 \leqslant n < \infty,$$

则 $\tilde{P} = \tilde{P}_\infty + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n$。于是由引理27，

$$\mathscr{U}_{\tilde{P}} = \mathscr{U}_{\tilde{P}_\infty} * \left(\mathop{*}_{n=1}^{\infty} \mathscr{U}_{\tilde{P}_n}\right),$$

其中$\mathscr{U}_{\tilde{P}_\infty}$是奇异无穷可分分布，$\mathop{*}\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{U}_{\tilde{P}_n}$是正则无穷可分分布。

由推论63，任何奇异无穷可分分布都是有后效的。下面的定理进一步指出了这个事实。

65. 定理 设$P \in \mathscr{P}_{IN}, A_k \uparrow X, A_k \in \mathscr{B}$。则$P$是奇异无穷可分分布，当且仅当对于任意的正整数$k \geqslant 1$有

$$\lim_{n \to \infty} P(\mu:\ \mu(A_k) = 0 \mid (\mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0)) = 1。$$

证明 因为当$k \to \infty$时总有

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k) > 0,\ \mu(X \setminus A_k) = 0) \longrightarrow \tilde{P}(\mu:\ \mu(X) < \infty),$$

而当$n \to \infty$时总有

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k) > 0,\ \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0) \longrightarrow \tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k) > 0,\ \mu(X \setminus A_k) = 0),$$

所以条件

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(X) < \infty) = 0$$

等价于条件

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k) > 0,\ \mu(A_{k+n}) \setminus A_k) = 0) = 0;$$

然而我们有

$$P(\mu:\ \mu(A_k) = 0 \mid (\mu:\ \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0))$$
$$= \exp(-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k) > 0,\ \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0)),$$

因而条件

$$P(\mu:\ \mu(A_k) = 0 \mid (\mu:\ (A_{k+n} \setminus A_k) = 0)) \longrightarrow 1,\quad (n \to \infty),$$

等价于条件

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A_k) > 0,\ \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0) \longrightarrow 0,\quad (n \to \infty).$$

定理得证。

第四章 点过程的收敛

本章讨论随机点过程的收敛性问题。§1与§2是预备知识；§3～§6讨论点过程收敛的一般原则；§7～§9分别讨论点过程的无穷小迭加收敛于 Poisson 过程、Gauss-Poisson 过程以及正则无穷可分点过程的充分必要条件。

§1. Campbell 测度

1. 定义 对于任意的$\mu\in N$，容易知道$\mu\times\delta_\mu$是$(X\times N,\ \mathscr{A}\times\mathbf{N})$上的测度。又对于任意的$Z\in\mathscr{A}\times\mathbf{N}$，容易知道映射

$$\mu\frown\mu\times\delta_\mu(Z)$$

是定义于$(N,\ \mathbf{N})$上的非负可测函数。因此对于任意一个$(N,\ \mathbf{N})$上的测度H，如果命

$$\mathscr{C}_H(\cdot)=\int\mu\times\delta_\mu(\cdot)\,H(d\mu)$$

则$\mathscr{C}_H$是$(X\times N,\ \mathscr{A}\times\mathbf{N})$上的测度，称之为$H$的 Campbell 测度。

由定义知，对于$A\in\mathscr{A}$，$Y\in\mathbf{N}$，有

$$\mathscr{C}_H(A\times Y)=\int\mu\times\delta_\mu(A\times Y)\,H(d\mu)=\int_Y\mu(A)\,H(d\mu),$$

特别取$Y=N$，则

$$\mathscr{C}_H(A\times N)=\int_N\mu(A)\,H(d\mu)=I_H(A)$$

即是H的一阶矩测度。

对于$(X\times N,\ \mathscr{A}\times\mathbf{N})$上的非负可测函数$f(a,\ \mu)$，由$H$的 Campbell 测度的定义不难证明：

$$\iint f(a,\ \mu)\,\mu(da)\,H(d\mu)=\int f(a,\ \mu)\,\mathscr{C}_H(da\times d\mu).$$

2. 引理 设$f(a,\ \mu)$是$(X\times N,\ \mathscr{A}\times\mathbf{N})$上的非负可测实函数，记

$$Y_f=\{\mu:\ \int f(a,\ \mu)\,\mu(da)=1\},$$

则对任意的$Y\in\mathbf{N}$以及$\mathbf{N}$上的任意测度H有

$$H(Y\cap Y_f)=\int_{Y\cap Y_f}f(a,\ \mu)\,\mathscr{C}_H(da\times d\mu).$$

证明 因为

$$\int 1_{Y\cap Y_f}(\mu)\,f(a,\ \mu)\,\mathscr{C}_H(da\times d\mu)$$

$$=\int 1_{Y\cap Y_f}(\mu)\int f(a,\ \mu)\,\mu(da)\,H(d\mu)=\int 1_{Y\cap Y_f}(\mu)\,H(d\mu)=H(Y\cap Y_f).$$

3. 定理 设$A\in\mathscr{A}$，$Y\in\mathbf{N}$，则对$\mathbf{N}$上的任意测度H有

$$H(\mu:\ \mu\in Y,\ 0<\mu(A)<\infty)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathscr{C}_H(A\times(\mu:\mu\in Y,\ \mu(A)=k)).$$

证明 命

$$f(a,\ \mu)=\begin{cases}0,\ a\notin A,\\(\mu(A))^{-1},\ a\in A,\end{cases}$$

则对任意 $\mu\in N$，如果 $0<\mu(A)<\infty$，必有

$$\int f(a,\ \mu)\,\mu(da)=1,$$

所以 $Y_f=\{\mu:\ 0<\mu(A)<\infty\}$。由引理 2 得

$$H(Y\cap Y_f)=\int 1_{Y\cap Y_f}(\mu)f(a,\ \mu)\mathscr{C}_H(da\times d\mu)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathscr{C}_H(A\times(\mu:\ \mu\in Y,\ \mu(A)=k)).$$

定理中的公式，称为反演公式。

4. 定理 $\mathscr{C}_{H_1}=\mathscr{C}_{H_2}$ 的充分必要条件为

$$H_1((\cdot)\setminus\{0\})=H_2((\cdot)\setminus\{0\}).$$

证明 只须证明必要性。对任意的 $A\in\mathscr{B}$，由定理 3 可知，对任意的 $Y\in\mathbf{N}$ 有

$$H_1(Y\cap(\mu:\mu(A)>0))=H_2(Y\cap(\mu:\mu(A)>0)),$$

现设 $A_n\uparrow X$，则

$$H_1(Y\setminus\{0\})=\lim_n H_1(Y\cap(\mu:\ \mu(A_n)>0))$$

$$=\lim H_2(Y\cap(\mu:\ \mu(A_n)>0))=H_2(Y\setminus\{0\}).$$

这个定理称为唯一性定理。

一般说来，即使 H 是有限的，$\mathscr{C}_H$ 也不一定是有限测度。但我们有

5. 定理 $\mathscr{C}_H$ 是 σ 有限的，当且仅当 $H((\cdot)\setminus\{0\})$ 是 σ 有限的。

证明 *充分性* 设 $H((\cdot)\setminus\{0\})$ 是 σ 有限的，于是存在 $Y_n\in\mathbf{N}$，$n=1,2,\cdots$ 使

$$H(Y_n)<\infty,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n=N\setminus\{0\},$$

设 $A_m\in\mathscr{B}$，$A_m\uparrow X$，$m=1,2,\cdots$，由定理 3 知

$$H(\mu:\ \mu\in Y_n,\ 0<\mu(A_m)<\infty)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\mathscr{C}_H(A_m\times(\mu:\ \mu\in Y_n,\ \mu(A_m)=k))<\infty,$$

所以 $\mathscr{C}_H(A_m\times(\mu:\ \mu\in Y_n,\ \mu(A_m)=k))<\infty$ 对一切 m，n，k 都成立。然而

$$X\times(N\setminus\{0\})=\bigcup_{m,n,k}(A_m\times(\mu:\ \mu\in Y_n,\ \mu(A_m)=k)),$$

所以 $\mathscr{C}_H$ 是 σ 有限的。

必要性 应用第一段末的关系式并利用如下事实：

可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度μ为σ有限的充要条件为：存在$(\Omega,\mathscr{F})$上处处为正的可测函数f，使

$$\int f(\omega)\mu(d\omega)<\infty.$$

§2. Z_+^m上依范数收敛定理及其推论

6. 引理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则$P\in\mathscr{P}_{IN}$的充分必要条件为：对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，作为$Z_+^m$上的概率分布$P_{A_1,\cdots,A_m}$是无穷可分的。

证明 只证充分性。假定$A_1,\cdots A_m\in\mathscr{B}$且互不相交。固定$k\geqslant1$命

$$p^{A_1,\cdots A_m}=\sqrt[k]{P_{A_1,\cdots,A_m}},$$

容易验证分布族$\{p^{A_1\cdots,A_m}:m\geqslant1,A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交$\}$满足定理Ⅱ.13的条件1)～4)。于是存在分布$Q\in\mathscr{P}_N$，使

$$Q_{A_1,\cdots,A_m}=p^{A_1,\cdots,A_m}=\sqrt[k]{P_{A_1,\cdots,A_m}},$$

因而

$$(Q^k)_{A_1\cdots A_m}=P_{A_1,\cdots,A_m},$$

由推论Ⅱ.5知$Q^k=P$。由k的任意性可知P确为无穷可分分布。

在第三章中我们讨论了$(N,\mathbf{N})$上的全体有限广义测度$\mathscr{E}r$，并定义

$$\|E\|=(E^++E^-)(N),\qquad E\in\mathscr{E}r.$$

现在如果取$X=\{1,2,\cdots,m\}$，则相应的$\mathscr{E}r$就是定义于Z_+^m上的全体实函数E，满足：

$$\|E\|=\sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+}|E(h_1,\cdots,h_m)|<\infty.$$

7. 定理 设E_n, $n=1,2,\cdots$是Z_+^m上的有限测度序列。为使E_n, $n=1,2,\cdots$依范数收敛于Z_+^m上的某个有限测度E，充分必要条件是下列极限都存在：

$$\lim_n\sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+}E_n(h_1,\cdots,h_m)=e,$$

$$\lim_n E_n(h_1,\cdots,h_m)=e(h_1,\cdots,h_m),\quad 凡(h_1,\cdots,h_m)\in Z_+^m,$$

并且

$$\sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+}e(h_1,\cdots,h_m)=e;$$

这时必有

$$E(h_1,\cdots,h_m)=e(h_1,\cdots,h_m).$$

证明 必要性 设$\|E_n-E\|\to 0$. 于是

$$\lim_n \sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+} |E_n(h_1,\cdots,h_m)-E(h_1,\cdots,h_m)|=0,$$

由此易推知对每$(h_1,\cdots,h_m)\in Z_+^m$，极限

$$e(h_1,\cdots,h_m)=\lim_n E_n(h_1,\cdots,h_m)$$

存在且等于$E(h_1,\cdots,h_m)$，并且

$$\lim_n \sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+} E_n(h_1,\cdots,h_m)=\sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+} E(h_1,\cdots,h_m).$$

充分性 假定定理的条件成立。对$(h_1,\cdots,h_m)\in Z_+^m$ 命

$$E(h_1,\cdots,h_m)=e(h_1,\cdots,h_m),$$

如此定义了Z_+^m上的测度E。由于定理条件已假定了极限

$$\lim_n \sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+} E_n(h_1,\cdots,h_m)=e$$

存在且等于

$$e=\sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+} e(h_1,\cdots,h_m)=\sum_{h_1,\cdots,h_m\in Z_+} E(h_1,\cdots,h_m)$$

$$=E(Z_+^m),$$

所以E是Z_+^m上的有限测度。命

$$F=E+\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\|E_n\|+1)^{-1}E_n,$$

则F也是Z_+^m上的有限测度，而且

$$E\ll F,\qquad E_n\ll F,\qquad n=1,2,\cdots,$$

设$f,f_n,n=1,2,\cdots$分别是E,E_n, $n=1,2,\cdots$相对于F的 Radon-Nikodym 导数，则易知

$$|f_n-f|\to 0,\quad a.e.F,\qquad n\to\infty,$$

$$|f_n-f|\leqslant 2,\quad a.e.F,$$

所以

$$\lim_n \|E_n-E\|=\lim_n\int|f_n-f|dF=0.$$

由引理6及定理7我们得到如下的推论。

8. 推论 设$E_n\in\mathscr{E}_+'$, $P_n=\mathscr{U}_{E_n}$, $n=1,2,\cdots$.又设$P\in\mathscr{P}_N$使$\lim_n\|P_n-P\|=0$，则

$P\in\mathscr{P}_{IN}$。

证明　由引理6，我们只须证明对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，$P_{A_1,\cdots,A_m}$是$Z_+^m$上的无穷可分分布。既然$P_{A_1,\cdots,A_m}$是$Z_+^m$上的分布，因而不失一般性，我们可以假定$X=\{1,2,\cdots,m\}$。

由于$P_n=\mathscr{U}_{E_n}$，故对任意的正整数k，$\sqrt[k]{P_n}$存在。将Z_+^m中的点排好序，应用对角线方法选取$n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots$使

$$e(h_1,\cdots,h_m)=\lim_j \sqrt[k]{P_{n_j}}(h_1,\cdots,h_m)$$

对一切$(h_1,\cdots,h_m)\in Z_+^m$存在。命

$$Q(h_1,\cdots h_m)=e(h_1,\cdots,h_m)\ ,\qquad (h_1,\cdots,h_m)\in Z_+^m$$

则Q是Z_+^m上的有限测度。

由于$\|P_{n_j}-P\|\to 0\ (j\to\infty)$，由定理7得

$$\lim_j \sum_{0<h_1,\cdots,h_m<h} P_{n_j}(h_1,\cdots,h_m)$$
$$=\sum_{0<h_1,\cdots,h_m<h} P(h_1,\cdots,h_m),$$

从而

$$\lim_j \sum_{0<h_1,\cdots,h_m<h} P_{n_j}(h_1,\cdots,h_m)\longrightarrow 1,\quad (h\to\infty),$$

于是也有

$$\lim_j \sum_{0<h_1,\cdots,h_m<h} \sqrt[k]{P_{n_j}}(h_1,\cdots,h_m)\longrightarrow 1,(h\to\infty),$$

从而知道：

$$Q(Z_+^m)=\lim_{h\to\infty}\sum_{0<h_1,\cdots,h_m<h} Q(h_1,\cdots,h_m)$$

$$=\lim_{h\to\infty}\sum_{0<h_1,\cdots,h_m<h} e(h_1,\cdots,h_m)=\lim_{h\to\infty}\lim_{j\to\infty}\sum_{0<h_1,\cdots,h_m<h}\sqrt[k]{P_{n_j}}(h_1,\cdots,h_m)$$
$$=1,$$

即Q是Z_+^m上的概率分布。又由定理7知道

$$\lim_{j\to\infty}\|\sqrt[k]{P_{n_j}}-Q\|=0,$$

从而$\lim\limits_{j\to\infty}\|P_{n_j}-Q^k\|=0$，即$Q^k=P$，从而$P\in\mathscr{P}_{IN}$。

我们下面还要给出定理7的几个推论。首先注意，在定义Ⅱ.43中，对于任意的$P\in\mathscr{P}_N$，定义了P的完全连续集和有界完全连续集。这个定义显然对于任意的$E\in\mathscr{E}_+$也适用。对于$E\in\mathscr{E}_+$，按照定义Ⅱ.43的记号，如果$A\in\mathscr{A}$且

$$E(N\backslash\partial_A N)=0,$$

则称A是E的完全连续集。全体E的完全连续集记为$\mathscr{A}_{CE}$，全体有界的E完全连续集记为$\mathscr{B}_{CE}$。有关的结果，例如引理Ⅱ.44及Ⅱ.45对$\mathscr{A}_{CE}$和$\mathscr{B}_{CE}$仍然成立。

9. 推论 设$E\in\mathscr{E}_+$，$E_n\in\mathscr{E}_+$，$n=1,2,\cdots$. 则

$$E_n \overset{w}{\Longrightarrow} E$$

当且仅当对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CE}$有

$$\lim_{n\to\infty}\|(E_n)_{A_1,\cdots,A_m}-E_{A_1,\cdots,A_m}\|=0.$$

证明 由于E,E_n，$n=1,2\cdots$都是有限测度，不失一般性可设它们都是概率测度。这时由定理Ⅱ.52的等价条件1)与4)以及本章的定理7可得本推论。

10. 推论 设$E,E',E_n,E_n'\in\mathscr{E}_+$，$n=1,2,\cdots$,并且

$$E_n \overset{w}{\Longrightarrow} E,\qquad E_n' \overset{w}{\Longrightarrow} E'$$

则

$$E_n*E_n' \Longrightarrow E*E'.$$

证明 只须对$E(N)>0$，$E'(N)>0$的情况证明即可。此时

$$I_{E*E'}(\partial A)=E'(N)I_E(\partial A)+E(N)I_{E'}(\partial A),$$

因此$\mathscr{B}_{C(E*E')}=\mathscr{B}_{CE}\cap\mathscr{B}_{CE'}$。现设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{C(E*E')}$且互不相交，则

$$\lim_{n\to\infty}\|(E_n*E_n')_{A_1,\cdots,A_m}-(E*E')_{A_1,\cdots,A_m}\|$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|(E_n)_{A_1,\cdots,A_m}*(E_n')_{A_1,\cdots,A_m}$$

$$-E_{A_1,\cdots,A_m}*(E_n')_{A_1,\cdots,A_m}\|+\limsup_{n\to\infty}\|E_{A_1,\cdots,A_m}*(E_n')_{A_1,\cdots,A_m}$$

$$-E_{A_1,\cdots,A_m}*E'_{A_1,\cdots,A_m}\|$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}E_n'(N)\|(E_n)_{A_1,\cdots,A_m}-E_{A_1,\cdots,A_m}\|$$

$$+E(N)\limsup_{n\to\infty}\|(E_n')_{A_1,\cdots,A_m}-E'_{A_1,\cdots,A_m}\|=0,$$

由推论9即得本推论。

11. 推论 $\mathscr{P}_{IN}$在距离空间$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中是闭集。

证明 设$P_n\in\mathscr{P}_{IN}$，$n=1,2\cdots$且$P_n\overset{w}{\Longrightarrow}P$,欲证$P\in\mathscr{P}_{IN}$。固定自然数$k$及任意$A\in\mathscr{B}$。设$j>0$则

$$\sqrt[k]{P_n}(\mu:\ \mu(A)\geqslant j)\leqslant P_n(\mu:\ \mu(A)\geqslant j),$$

由定理Ⅱ.41知$\{\sqrt[k]{P_n},\ n=1,2,\cdots\}$是弱相对紧的，于是存在子序列$\{n_i\}$及$P^{(k)}$使

$$\sqrt[k]{P_{n_j}} \xrightarrow{w} P^{(k)},$$

但由推论10得 $P_{n_j} \xrightarrow{w} (P^{(k)})^k = P$,从而$P^{(k)} = \sqrt[k]{P}$,所以$P\in\mathscr{P}_{IN}$.

§3. 强无穷小三角序列

12. 在第Ⅱ章中曾讨论了强无穷小三角序列，给出了相应的收敛定理。但在那里没有讨论这样的问题：强无穷小三角序列如果收敛，是否一定收敛于无穷可分分布？下面的定理肯定地回答了这一问题。首先回忆一下强无穷小三角序列的定义。

设 $\{P_{nj}, n\in Z_+, 1\leqslant j\leqslant k_n\}\subset\mathscr{P}_N$.如果

$$\lim_{n\to\infty}\min_{1\leqslant j\leqslant k_n} P_{nj}(\{0\}) = 1,$$

则称 $\{P_{nj}\}$是强无穷小三角序列。这显然等价于

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(\{0\}) = 0.$$

13. 定理 设 $\{P_{nj}\}$是强无穷小三角序列。如果存在$P\in\mathscr{P}_N$使

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n} P_{nj} - P\| = 0,$$

则$P\in\mathscr{P}_{IN}$.

证明 根据引理6，我们只须证明对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$, $P_{A_1,\cdots,A_m}$是无穷可分的。由 $P_{A_1,\cdots,A_m}$是 Z_+^m上的概率分布，故不失一般性，我们可以假定$X=\{1,2,\cdots,m\}$.

现在首先证明

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))<\infty$$

不然的话，则存在$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$,使

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_{n_i}}(1-P_{n_ij}(0)) = \infty,$$

为了书写简便起见，无妨设$n_1=1, n_2=2,\cdots,n_i=i,\cdots$,于是有$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0)) = \infty$.

考虑$X=\{1,2,\cdots m\}$上以 P_{nj} 为分布的点过程ξ_{nj} (实际上是 Z_+^m值的随机向量)，且设对每一 n, $\xi_{n1},\xi_{n2},\cdots,\xi_{nk_n}$ 是相互独立的。若以Q_n记它们的联合分布，则

$$Q_n = P_{n1}\times\cdots\times P_{nk_n},\quad n=1,2,\cdots.$$

命

$$\eta_{nj} = \min(\xi_{nj}(X), 1),\quad 1\leqslant j\leqslant k_n, n=1,2,\cdots$$

则对每一$n, \eta_{n1}, \eta_{n2}, \cdots, \eta_{nk_n}$是相互独立的随机变量，$\eta_{nj}$具有如下的分布

$$P_{nj}(0)\delta_0+(1-P_{nj}(0))\delta_1, \quad n=1,2,\cdots, \quad 1\leqslant j\leqslant k_n.$$

应用切比雪夫不等式得：

$$\limsup_{n\to\infty} Q_n\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}\eta_{nj}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))\Big)$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty} Q_n\Big(\Big|\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(\eta_{nj}-1+P_{nj}(0))\Big|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))\Big)$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{4\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(0)(1-P_{nj}(0))}{\Big(\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))\Big)^2}$$

$$\leqslant 4\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))}=0,$$

从而对任意正整数l有

$$\limsup_{n\to\infty}\big(\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}\big)(\mu:\ \mu(X)\leqslant l)$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty} Q_n\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}\xi_{nj}(X)\leqslant l\Big)=0;$$

另一方面，由于$X=\{1,2,\cdots,m\}$以及$\|\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}-P\|\to 0$，得：

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{n\to\infty}\big(\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}\big)(\mu:\ \mu(X)\leqslant l)$$

$$=\lim_{l\to\infty}P(\mu:\ \mu(X)\leqslant l)=1,$$

这就导出矛盾。因此我们证明了

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))<\infty.$$

于是由强无穷小三角序列的定义推知

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))^2$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(1-P_{nj}(0))=0,$$

现在应用定理Ⅱ.18得到：

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}-\mathscr{U}_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}}\Big\|=0,$$

因此亦有

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\mathscr{U}_{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}}-P\Big\|=0,$$

如果我们命

$$P_n = \mathscr{U}\sum_{1\leqslant i\leqslant k_n} P_{ni}, \qquad n=1,2,\cdots,$$

则由推论 8 知$P\in\mathscr{P}_{IN}$.定理证毕。

§4. 距离空间($\mathscr{E}_\infty$, $\rho_{\mathscr{E}_\infty}$)

14. 引理 在 X 中取定一点，以 S_d 记半径 d 而中心在这定点的开球。对任意的 $\mu\in N$，命

$$\gamma(\mu)=\sup\{d : \mu(S_d)=0\},$$

则 $\gamma(\mu)$ 是从 (N, ρ_N) 到 $[0, \infty]$ 的连续映像。

证明 显然 $\gamma(\mu)=+\infty$当且仅当 $\mu=0$。设 μ_n，$\mu\neq 0$ 是 N 中的元并且 $\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$，要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(\mu_n)=\gamma(\mu)$。

当 $d<\gamma(\mu)$ 时，$\mu(\partial S_d)=0$，从而由定理 I.22的2)得

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(S_d)=\mu(S_d)=0,$$

因此 $d\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\gamma(\mu_n)$ 即 $\gamma(\mu)\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\gamma(\mu_n)$； 当 $d>\gamma(\mu)$ 时，由定理 I.22 的 3) 知

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(S_d)\geqslant\mu(S_d)\geqslant 1,$$

因此 $\limsup\limits_{n\to\infty}\gamma(\mu_n)\leqslant d$，即 $\gamma(\mu)\geqslant\limsup\limits_{n\to\infty}\gamma(\mu_n)$。结合上面的不等式就有

$$\gamma(\mu)=\lim_{n\to\infty}\gamma(\mu_n).$$

15. 定义 记 $N^\Delta=N\setminus\{0\}$，在 N^Δ 上定义

$$\rho_{N^\Delta}(\mu, \lambda)=\rho_N(\mu, \lambda)+|\gamma(\mu)-\gamma(\lambda)|, \quad \mu, \lambda\in N^\Delta,$$

容易验证 ρ_{N^Δ}是 N^Δ 上的距离。

与(N, ρ_N)不同，$(N^\Delta, \rho_{N^\Delta})$不再是有界距离空间了。由引理14，如果将$\rho_N$限制在$N$上，则 ρ_N与ρ_{N^Δ}在 N^Δ 上产生同一拓扑。

16. 引理 $(N^\Delta, \rho_{N^\Delta})$是可分完备距离空间。

证明 只证完备性，设 $\mu_n\in N^\Delta$，$n=1,2,\cdots$是 ρ_{N^Δ}意义下的 Cauchy 序列，当然对距离 ρ_N 而言它也是 Cauchy 序列。由于 ρ_N 是完备距离，故存在 $\mu\in N$，使 $\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$。现证 $\mu\neq 0$，即$\mu\in N^\Delta$。不然的话，由引理14将得出

$$\lim_{n\to\infty}\gamma(\mu_n)=\gamma(\mu)=+\infty,$$

但因 $\{\mu_n\}$ 是ρ_{N^Δ}意义下的 Cauchy 序列，故当 m，$n\to\infty$时有

$$|\nu(\mu_n)-\nu(\mu_m)|\longrightarrow 0,$$

这便得出矛盾。所以 $\mu\neq 0$。

仍由引理14及 ρ_{N^Δ} 的定义看出 $\rho_{N^\Delta}(\mu_n,\ \mu)$ 当 n 趋于无穷时趋于 0，即 $\{\mu_n\}$ 在 ρ_{N^Δ} 意义下收敛于 μ。所以 $(N^\Delta,\ \rho_{N^\Delta})$ 是完备的。

下面的引理描述了 $(N^\Delta,\ \rho_{N^\Delta})$ 中的全部有界集，这正是我们所需要的。

17. 引理 N^Δ 的子集 Y 在 ρ_{N^Δ} 意义下是有界的，当且仅当存在 $A\in\mathscr{B}$ 使

$$Y\subset\{\mu:\mu\in N,\ \mu(A)>0\}.$$

证明 *必要性* 对任意固定的 $\lambda\in N^\Delta$，有

$$\sup_{\mu\in Y}|\nu(\mu)-\nu(\lambda)|\leqslant\sup_{\mu\in Y}\rho_{N^\Delta}(\mu,\ \lambda)<\infty,$$

从而也有

$$\sup_{\mu\in Y}\nu(\mu)<\infty.$$

任取 $d>\sup\limits_{\mu\in Y}\nu(\mu)$ 则

$$Y\subset\{\mu:\mu(S_d)>0\};$$

充分性 取 d 使 $A\subset S_d$ 则

$$Y\subset\{\mu:\mu(S_d)>0\}.$$

所以

$$\sup_{\mu\in Y}\nu(\mu)\leqslant d<\infty,$$

任取 $\lambda\in N^\Delta$，则

$$\sup_{\mu\in Y}\rho_{N^\Delta}(\mu,\ \lambda)\leqslant\sup_{\mu\in Y}\rho_N(\mu,\ \lambda)+\sup_{\mu\in Y}(\nu(\mu)+\nu(\lambda))<\infty,$$

所以 Y 在 ρ_{N^Δ} 意义下是有界的。

18. 定义 令

$$\mathbf{N}^\Delta=(N\setminus\{0\})\cap\mathbf{N},$$

显然 $\mathbf{N}^\Delta$ 是 $(N^\Delta,\ \rho_{N^\Delta})$ 中的全体 Borel 子集，以 $\mathscr{B}(N^\Delta)$ 记其中的全体有界 Borel 集。注意，$(N,\ \rho_N)$ 是有界距离空间，因而 $(N,\ \rho_N)$ 中全体 Borel 集与全体有界 Borel 集是一回事。但 $(N^\Delta,\ \rho_{N^\Delta})$ 不再是有界距离空间，因而 $\mathbf{N}^\Delta$ 和 $\mathscr{B}(N^\Delta)$ 是有区别的。

由于 $(N^\Delta,\ \rho_{N^\Delta})$ 是非有界的可分完备距离空间，在 $(N^\Delta,\ \rho_{N^\Delta})$ 上可定义局部有限测度，全体 $(N^\Delta,\ \rho_{N^\Delta})$ 上的局部有限测度记作 $\mathscr{E}_\infty^\Delta$。

现在我们回忆一下在 Ⅱ.26中定义的 $\mathscr{E}_\infty$。按照那里的定义，$\mathscr{E}_\infty$ 是全体满足如下条件的测度：$E\in\mathscr{E}_\infty$ 当且仅当：

1) $E(\{0\})=0$;

2) $E(\mu:\mu(A)>0)<\infty$, 凡 $A\in\mathscr{B}$。

对于 $E\in\mathscr{E}_\infty$，命

$$E^\Delta(Y)=E(Y),\qquad 凡\ Y\in\mathbf{N}^\Delta,$$

则$E\in\mathscr{E}_\infty^\Delta$。容易验证映射$E\searrow E^\Delta$是$\mathscr{E}_\infty$到$\mathscr{E}_\infty^\Delta$上的一一映射。由于$\mathscr{E}_\infty^\Delta$是$(N^\Delta, \rho_{N^\Delta})$上的全体局部有限测度，按照Ⅰ.23，我们可以在$\mathscr{E}_\infty^\Delta$上引入距离$\rho_{\mathscr{E}_\infty^\Delta}$使$(\mathscr{E}_\infty^\Delta, \rho_{\mathscr{E}_\infty^\Delta})$是有界的可分完备距离空间，在$\rho_{\mathscr{E}_\infty^\Delta}$意义下的收敛，即是局部弱收敛。

现在对于任意的E_1，$E_2\in\mathscr{E}_\infty$，命

$$\rho_{\mathscr{E}_\infty}(E_1, E_2)=\rho_{\mathscr{E}_\infty^\Delta}(E_1^\Delta, E_2^\Delta),$$

则由于映射$E\searrow E^\Delta$是一一的且满射的，所以$\rho_{\mathscr{E}_\infty}$是$\mathscr{E}_\infty$上的距离，并且$(\mathscr{E}_\infty, \rho_{\mathscr{E}_\infty})$与$(\mathscr{E}_\infty^\Delta, \rho_{\mathscr{E}_\infty^\Delta})$是同胚的，因而$(\mathscr{E}_\infty, \rho_{\mathscr{E}_\infty})$是可分完备的。

19. 引理 设$E\in\mathscr{E}_\infty$，$E_n\mathscr{E}_\infty$，$n=1,2,\cdots$。为使$\{E_n\}$在$\rho_{\mathscr{E}_\infty}$意义下收敛于$E$，充分必要条件为：对于$(N, \rho_N)$上定义的任何一个支承包含在某个如下集合

$$(\mu: \mu\in N,\ \mu(A)>0), \qquad A\in\mathscr{B},$$

的有界连续函数$f(\mu)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int f(\mu)\, E_n(d\mu)=\int f(\mu)\, E(d\mu).$$

证明 由前段中关于$\rho_{\mathscr{E}_\infty}$及$\rho_{\mathscr{E}_\infty^\Delta}$的关系以及$(N^\Delta, \rho_{N^\Delta})$中有界集的构造，不难验明本引理。

我们约定，$\mathscr{E}_\infty$中的序列$\{E_n\}$在距离$\rho_{\mathscr{E}_\infty}$意义下收敛于某个$E\in\mathscr{E}_\infty$，仍记作$E_n\overset{l}{\Longrightarrow}E$。

下面的引理推广了推论9。我们先将定义Ⅱ.43推广到$\mathscr{E}_\infty$上去。设$A\in\mathscr{A}$，命

$$\partial_A N=\{\mu: \mu(\partial A)=0\},$$

如果$E\in\mathscr{E}_\infty$，并且

$$E(N\backslash\partial_A N)=0,$$

则称A是E的完全连续集，全体E的完全连续集记作$\mathscr{A}_{CE}$，以$\mathscr{B}_{CE}$记E的全体有界完全连续集。

20. 引理 设$E\in\mathscr{E}_\infty$，$E_n\in\mathscr{E}_\infty$，$n=1,2,\cdots$。则

$$E_n\overset{l}{\Longrightarrow}E$$

当且仅当对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CE}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|(E_n)_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))-E_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))\|=0,$$

其中$(0,\cdots,0)$是Z_+^m中的零点。

证明 *必要性* 设 $E_n \overset{l}{\Longrightarrow} E$。对任意互不相交的 $A_1,\cdots,A_m \in \mathscr{B}_{CE}$，命 $A=\bigcup_{i=1}^{m} A_i$，且以 $f(\mu)$ 记集合

$$(\mu:\mu\in N,\ \mu(A)>0).$$

的示性函数。容易证明 $f(\mu)$ 的不连续点集 D_f 含于集合 $(\mu:\ \mu\in N,\ \mu(\partial A)>0)$ 之中，因而 $E(D_f)=0$。利用这一点及 $E_n \overset{l}{\Rightarrow} E$ 可证明如下定义的有限测度：

$$F_n(\cdot)=E_n((\cdot)\cap(\mu:\ \mu(A)>0)),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$F(\cdot)=E((\cdot)\cap(\mu:\ \mu(A)>0))$$

满足关系式 $F_n \overset{w}{\Rightarrow} F$，并且 $A_1,\cdots,A_m \in \mathscr{B}_{CF}$。

于是由推论 9，得到

$$\lim_{n\to\infty}\|(E_n)_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))-E_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\|(F_n)_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))-F_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))\|=0.$$

充分性 设定理条件满足，$g(\mu)$ 是 (N,ρ_N) 上的有界连续函数且其支承含于 $(\mu:\ \mu(A)>0)$ 之中，这里 $A\in\mathscr{B}$。取 $B\in\mathscr{B}_{CE}$ 且 $B\supset A$，则对于如下的有限测度：

$$E_n((\cdot)\cap(\mu:\ \mu(B)>0)),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$E((\cdot)\cap(\mu:\ \mu(B)>0)),$$

由推论 9 得

$$E_n((\cdot)\cap(\mu:\ \mu(B)>0))\overset{w}{\Longrightarrow}E((\cdot)\cap(\mu:\ \mu(B)>0)),$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\int g(\mu)E_n(d\mu)=\int g(\mu)E(d\mu),$$

所以 $E_n \overset{l}{\Rightarrow} E$。

由推论 9 及引理20，我们得到下面有用的结果。

21. 引理 设 $P_n\in\mathscr{P}_{IN}$，$\tilde{P}_n$ 是相应的典则测度，$n=1,2,\cdots$，则 $P_n \overset{w}{\Rightarrow} P$ 当且仅当 $\tilde{P}_n \overset{l}{\Rightarrow} \tilde{P}$。

证明 设 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CP}$ 且互不相交。由定理 Ⅱ．35得

$$\widetilde{(P_n)}_{A_1,\cdots,A_m}=(\tilde{P}_n)_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0)),\quad n=1,2\cdots,$$

$$\widetilde{(P)}_{A_1,\cdots,A_m}=\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0)),$$

再由定理 Ⅱ．19推知

$$\lim_{n\to\infty}\|(P_n)_{A_1,\cdots,A_m}-P_{A_1,\cdots,A_m}\|=0$$

等价于

$$\lim_{n\to\infty}\|(\tilde{P}_n)_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0)) - (\tilde{P})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))\|$$

由完全连续集的定义推知$\mathscr{B}_{CP}=\mathscr{B}_{C\tilde{P}}$，从而应用推论9及引理20知$P_n\overset{w}{\Rightarrow}P$等价于$\tilde{P}_n\overset{l}{\Rightarrow}\tilde{P}$。

22. $\mathscr{P}_N$，$\mathscr{E}_+$，$\mathscr{E}_\infty$都是$(N,\mathbf{N})$上的测度集。$P\in\mathscr{P}_N$称为点分布，$\mathscr{E}_+$是$(N,\mathbf{N})$上的有限测度集，$\mathscr{E}_\infty$是满足条件$E(\{0\})=0$，且对任意的$A\in\mathscr{B}$，

$$E(\mu:\ \mu(A)>0)<\infty$$

的测度集。$\mathscr{P}_N$是$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中的闭子集，然而$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$不是$(\mathscr{E}_\infty,\rho_{\mathscr{E}_\infty})$的子空间。我们注意，$\mathscr{E}_+$是$(N,\rho_N)$上的全部有限测度且因为$(N,\rho_N)$是有界距离空间，所以$\mathscr{E}_+$又可看作是$(N,\rho_N)$上的全部局部有限测度集。

然而$\mathscr{E}_\infty$不是(N,ρ_N)上的局部有限测度集，它是通过距离空间$(N^\Delta,\rho_{N^\Delta})$定义的。由于前面诸段所述的理由，我们今后就集$\mathscr{E}_\infty$看作$\mathscr{E}^\Delta_\infty$，两者不加区别。

§5. $(\mathscr{E}_\infty,\ \rho_{\mathscr{E}_\infty})$中的收敛

23. 引理 设$E\in\mathscr{E}_\infty$，$E_n\in\mathscr{E}_\infty$，$n=1,2,\cdots$，并且

$$E_n\overset{l}{\Longrightarrow}E,$$

则对任意$A\in\mathscr{B}_{CE}$有

$$I_E(A)\leqslant\liminf_n I_{E_n}(A).$$

证明 由引理Ⅰ.45（引理Ⅰ.45是对$P\in\mathscr{P}_N$证明的，其实不须作什么修改就可推广到$\mathscr{E}_\infty$上去），$A\in\mathscr{B}_{CE}$的充要条件为

$$Y_j=\{\mu:\ \mu(A)=j\}\in\mathscr{B}_E(N),$$

这里$\mathscr{B}_E(N)$是E的有界连续集类。于是由$E_n\overset{l}{\Rightarrow}E$并用Fatou引理得

$$I_E(A)=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}jE(\mu:\ \mu(A)=j)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\ \lim_n\sum_{j=1}^{k}jE_n(\mu:\ \mu(A)=j)$$

$$\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}jE_n(\mu:\ \mu(A)=j)=\liminf_{n\to\infty}I_{E_n}(A).$$

24. 引理 设$E\in\mathscr{E}_\infty$，$E_n\in\mathscr{E}_\infty$，$I_E\in M$，$I_{E_n}\in M$，$n=1,2,\cdots$。又设$E_n\overset{l}{\Rightarrow}E$。则$I_{E_n}\overset{l}{\Rightarrow}I_E$当且仅当对任意的$A\in\mathscr{B}_{CE}$一致地有

$$\sum_{j>k}jE_n(\mu:\ \mu(A)=j)\longrightarrow0,\ (k\to\infty),$$

也就是说级数$I_{E_n}(A) = \sum_{j=1}^{\infty} jE_n(\mu: \mu(A)=j)$对$n$一致收敛.

证明 必要性 设$A\in\mathscr{B}_{CE}$. 如果$I_{E_n}\overset{l}{\Rightarrow}I_E$, 则

$$\lim_{n\to\infty} I_{E_n}(A) = I_E(A).$$

给定$\varepsilon>0$, 选取k_0使

$$\sum_{j>k_0} jE(\mu: \mu(A)=j)<\varepsilon,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j>k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(I_{E_n}(A)-\sum_{j\leqslant k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j)\right)$$

$$=I_E(A)-\sum_{j\leqslant k_0} jE(\mu: \mu(A)=j)$$

$$=\sum_{j>k_0} jE(\mu: \mu(A)=j)<\varepsilon,$$

这就是说, 存在n_0, 使

$$\sum_{j>k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j)<\varepsilon$$

对一切 $n\geqslant n_0$ 成立, 所以$\sum_{j=1}^{\infty} jE_n(\mu: \mu(A)=j)$关于$n$一致收敛.

充分性 设$A\in\mathscr{B}_{CE}$, $\varepsilon>0$任意给定. 则

$$|I_{E_n}(A)-I_E(A)|$$

$$\leqslant\sum_{j>k} jE_n(\mu: \mu(A)=j)+\sum_{j>k} jE(\mu: \mu(A)=j)$$

$$+\left|\sum_{j\leqslant k} jE_n(\mu: \mu(A)=j)-\sum_{j\leqslant k} jE(\mu: \mu(A)j)\right|,$$

由引理的条件可选取k_0使

$$\sum_{j>k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j)<\varepsilon, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{j>k_0} jE(\mu: \mu(A)=j)<\varepsilon,$$

因为$A\in\mathscr{B}_{CE}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}|I_{E_n}(A)-I_E(A)|$$

$$\leqslant 2\varepsilon+\limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{j>k_0} jE_n(\mu:\ \mu(A)=j)-\sum_{j>k_0} jE(\mu:\ \mu(A)=j)\right|\leqslant 2\varepsilon,$$

又由$\mathscr{B}_{CE}$的定义显然可推出$\mathscr{B}_{CE}=\mathscr{B}_{I_E}$，因此

$$I_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_E\ .$$

下面我们研究$\mathscr{E}_\infty$中元素的Campbell测度的收敛性，这与点过程的收敛性有直接的关系。为此先作一些记号上的说明并给出一些引理。

25. 设(X,ρ_X)与(Y,ρ_Y)是两个可分完备距离空间，定义$X\times Y$上的距离如下

$$\rho_{X\times Y}((x_1,y_1),\ (x_2,y_2))=\rho_X(x_1,x_2)+\rho_Y(y_1,y_2),$$

其中(x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in X\times Y$。于是$(X\times Y,\rho_{X\times Y})$是可分完备距离空间。

$(X\times Y,\rho_{X\times Y})$中的集合$C$是有界的，当且仅当存在$(X,\rho_X)$中的有界集$A$及$(Y,\rho_Y)$中的有界集$B$使$C\subset A\times B$。

分别以$\mathscr{A}(X),\mathscr{A}(Y),\mathscr{A}(X\times Y)$记$(X,\rho_X),(Y,\rho_Y),(X\times Y,\rho_{X\times Y})$中的Borel集类，则$\mathscr{A}(X\times Y)=\mathscr{A}(X)\times\mathscr{A}(Y)$；又分别以$\mathscr{B}(X),\mathscr{B}(Y),\mathscr{B}(X\times Y)$记相应的有界Borel集类。

这样我们便有了如下的距离空间：

$$(X\times N,\rho_{X\times N}),\quad (N\times\mathscr{E}_+,\ \rho_{N\times\mathscr{E}_+}),\ (X\times N^\Delta,\rho_{X\times N^\Delta}),$$

$$(N^\Delta\times\mathscr{E}^\Delta_\infty,\ \rho_{N^\Delta\times\mathscr{E}^\Delta_\infty}),\ (N^\Delta\times\mathscr{E}_\infty,\rho_{N^\Delta\times\mathscr{E}_\infty}),$$

这些空间以后我们将随便采用，其意义非常明显。

26. 对于(N,ρ_N)上的测度H，在前面我们已定义了H的Campbell测度$\mathscr{C}_H$，对于$A\in\mathscr{B}$及$Y\in\mathbf{N}$，有

$$\mathscr{C}_H(A\times Y)=\int\mu\times\delta_\mu(A\times Y)H(d\mu).$$

对于任意的$\mu\in N$，$\mu\times\delta_\mu$实际上是可分完备距离空间$(X\times N,\rho_{X\times N})$上的计数测度。因为对任意的$A\in\mathscr{B}$及$Y\in\mathbf{N}$有

$$\mu\times\delta_\mu(A\times Y)=\mu(A)\delta_\mu(Y)\in Z_+,$$

于是如果我们以$(X\times N,\rho_{X\times N})$取代$(X,\rho_X)$，新的计数测度空间，按照Ⅰ.6关于记号的约定，即为$(N(X\times N),\mathbf{N}(X\times N))$；而相应的在局部弱收敛意义下的距离空间，记作$(N(X\times N),\rho_{N(X\times N)})$。

这些记号比较复杂。不过上述记号只在本节使用，以后不再用到。但是本节的结果今后是有用的。

由上所述，$\mu\times\delta_\mu\in N(X\times N)$。不仅如此，下面的引理指出，$\mu\frown\mu\times\delta_\mu$还是$(N,\rho_N)$到$(N(X\times N),\rho_{N(X\times N)})$中的连续映象。为此先证明一个预备性的引理。

27. 引理 设$f(a,\mu)$是$(X\times N,\rho_{X\times N})$上的有界连续函数并且有有界支承，则对任意的$E\in\mathscr{E}_+$，

$$g(a)=\int f(a,\mu)E(d\mu)$$

是(X,ρ_X)上的有界连续函数，且有有界支承。

证明 由于(N,ρ_N)是有界距离空间，故存在$A\in\mathscr{B}$使$f(a,\mu)$的支承含在$(X\times N,\rho_{X\times N})$中的有界集$A\times N$之内。从而

$$g(a)=\int f(a,\mu)E(d\mu)$$

的支承在A之内，$g(a)$显然有界连续。

28. 引理 映象$\mu\frown\mu\times\delta\mu$是连续的。

证明 显然$\mu\frown\delta\mu$是(N,ρ_N)到$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$的连续映象，于是$(\mu,\delta\mu)$是$(N,\rho_N)$到$(N\times\mathscr{E}_+,\rho_{N\times\mathscr{E}_+})$的连续映象。于是我们只须证明

$$(\mu,\delta\mu)\frown\mu\times\delta\mu$$

是$(N\times\mathscr{E}_+,\rho_{N\times\mathscr{E}_+})$到$(N(X\times N),\rho_{N(X\times N)})$的连续映象。

设$\mu_n\overset{l}{\Rightarrow}\mu$，$f(a,\mu)$是$(X\times N,\rho_{X\times N})$上的任意一个具有有界支承的有界连续函数。命

$$g_n(a)=\int f(a,\lambda)\delta_{\mu_n}(d\lambda),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$g(a)=\int f(a,\lambda)\delta\mu(d\lambda),$$

由引理27，如果$f(a,\lambda)$的支承含在$A\times N$中，$A\in\mathscr{B}$，则$g_n(a)$和$g(a)$的支承含在A之内，不失一般性，可设A是(X,ρ_X)中的闭集。

由于$\mu_n\overset{l}{\Rightarrow}\mu$，由定理Ⅰ.24，对任给的$\varepsilon>0$，存在$A$的紧子集$K_{A,\varepsilon}$使

$$\sup_n\mu_n(A\backslash K_{A,\varepsilon})<\varepsilon,\quad n=1,2,\cdots,$$

由此可知

$$\left|\int_{A\backslash K_{A,\varepsilon}}g_n(a)\mu_n(da)-\int_{A\backslash K_{A,\varepsilon}}g(a)\mu_n(da)\right|$$
$$\leqslant 2C\sup_n\mu_n(A\backslash K_{A,\varepsilon})<2C\varepsilon,$$

其中C是$g(a),g_n(a),n=1,2,\cdots,$的共同上界。

因为$g(a)$有界连续且有界支承，故由$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$可知：当$n$充分大时

$$\left|\int g(a)\mu_n(da)-\int g(a)\mu(da)\right|<\varepsilon.$$

再根据$g(a),g_n(a),n=1,2,\cdots$的定义可推知$g_n(a),n=1,2,\cdots$，在紧集$K_{A,\varepsilon}$上一致收敛于$g(a)$。由此可知当n充分大时

$$\left|\int_{K_{A,\varepsilon}}g_n(a)\mu_n(da)-\int_{K_{A,\varepsilon}}g(a)\mu_n(da)\right|<\varepsilon.$$

综上所述，可知当n充分大时有

$$\left|\int f(a,\lambda)\mu_n\times\delta_{\mu_n}(da\times d\lambda)-\int f(a,\lambda)\mu\times\delta\mu(da\times d\lambda)\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{K_{A,\varepsilon}}g_n(a)\mu_n(da)-\int_{K_{A,\varepsilon}}g(a)\mu_n(da)\right|+\left|\int_{A\backslash K_{A,\varepsilon}}g_n(a)\mu_n(da)\right.$$

$$-\int_{A\setminus K_{A,\varepsilon}} g(a)\mu_n(da)\Big| + \Big|\int g(a)\mu_n(da) - \int g(a)\mu(da)\Big| < 3\varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\int f(a,\lambda)\mu_n\times\delta_{\mu_n}(da\times d\lambda) = \int f(a,\lambda)\mu\times\delta_\mu(da\times d\lambda),$$

也就是说

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{N(X\times N)}(\mu_n\times\delta_{\mu_n},\mu\times\delta_\mu) = 0.$$

29. 如同定义25，$(N(X\times N),\rho_{N(X\times N)})$是以$(X\times N,\rho_{X\times N})$为相空间的计数测度空间，这当然是有界距离空间。因为我们只是以$X\times N$取代了X，以$N(X\times N)$取代了N而已。

现在命

$$N^{\Delta}(X\times N) = N(X\times N)\setminus\{0\},$$

这里 0 表示$X\times N$上的零测度。因此可以按照§3的方法定义距离空间$(N^{\Delta}(X\times N),\rho_{N^{\Delta}(X\times N)})$，继而定义$(\mathscr{E}^{\Delta}_\infty(X\times N),\rho_{\mathscr{E}^{\Delta}_\infty(X\times N)})$以及$(\mathscr{E}_\infty(X\times N),\rho_{\mathscr{E}_\infty(X\times N)})$。

设$E\in\mathscr{E}_\infty$，在映射$\mu\frown\mu\times\delta_\mu$之下，由$E$所诱导的测度，记为$\bar{E}$。我们指出，$\bar{E}\in\mathscr{E}_\infty(X\times N)$。事实上，有

$$\bar{E}(\{0\}) = E(\mu:\ \mu\times\delta_\mu = 0) = E(\{0\}) = 0.$$

现设C是$(X\times N,\rho_{X\times N})$中的有界集，由引理17，存在$A\in\mathscr{B}$使

$$\bar{E}(\lambda:\ \lambda\in N(X\times N),\lambda(C)>0)$$
$$\leqslant E(\mu:\ \mu\in N,\mu\times\delta_\mu(A\times N)>0) = E(\mu:\ \mu(A)>0)<\infty,$$

故$\bar{E}\in\mathscr{E}_\infty(X\times N)$。

30. 引理 设$E\in\mathscr{E}_\infty$，$E_n\in\mathscr{E}_\infty$，$n=1,2,\cdots$。如果

$$E_n\overset{l}{\Longrightarrow}E,$$

则$\bar{E}_n\overset{l}{\Longrightarrow}\bar{E}$。

证明 设$f(\lambda)$是$(N^{\Delta}(X\times N),\rho_{N^{\Delta}(X\times N)})$上的有界连续函数具有有界支承。我们要证：

$$\int f(\lambda)\bar{E}_n(d\lambda)\longrightarrow\int f(\lambda)\bar{E}(d\lambda),\quad(n\to\infty)$$

由引理17，存在$X\times N$上的有界集C，使f在集合

$$\{\lambda:\ \lambda\in N(X\times N),\ \lambda(C)>0\}$$

之外为 0。由于C是$X\times N$上的有界集，故存在$A\in\mathscr{B}$，使$C\subset A\times N$。于是

$$\{\lambda:\ \lambda\in N(X\times N),\lambda(C)>0\}\subset\{\lambda:\ \lambda\in N(X\times N),\lambda(A\times N)>0\},$$

现令

$$g(\mu) = f(\mu\times\delta_\mu),$$

由引理28，$g(\mu)$在(N,ρ_N)上连续，而且支承在$\{\mu:\ \mu\in N,\mu(A)>0\}$之内。由$E_n\overset{l}{\Longrightarrow}E$及引

理19得

$$\lim_{n\to\infty}\int g(\mu)E_n(d\mu)=\int g(\mu)E(d\mu),$$

然而

$$\int g(\mu)\ E_n(d\mu)=\int f(\lambda)\bar{E}_n(d\mu),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\int g(\mu)\ E(d\mu)=\int f(\lambda)\bar{E}(d\lambda),$$

所以欲证之等式成立。

下面的定理31是本节的主要结果，也是今后必须用到的。它指出了在某些条件之下，Campbell测度局部弱收敛的充要条件。

设$E\epsilon\mathscr{E}_\infty$，$E$的Campbell测度可以表为

$$\mathscr{C}_E(\cdot)=\int\mu\times\delta\mu(\cdot)E(d\mu).$$

由定理5，$\mathscr{C}_E$总是σ有限的。我们曾指出

$$I_E(A)=\mathscr{C}_E(A\times N),A\epsilon\mathscr{B},$$

一般说来，$I_E(\cdot)$不一定是(X,ρ_X)上的局部有限测度。如果$I_E\epsilon M$，则称E的测度是局部有限的。

显然，当$E\epsilon\mathscr{E}_\infty,I_E\epsilon M$时，$\mathscr{C}_E(\cdot)$是$(X\times N,\rho_{X\times N})$上的局部有限测度，即

$$\mathscr{C}_E\epsilon N(X\times N).$$

31. 定理 设$E\epsilon\mathscr{E}_\infty,I_E\epsilon M,E_n\epsilon\mathscr{E}_\infty,I_{E_n}\epsilon M$，$n=1,2,\cdots$.在这些条件之下，$\mathscr{C}_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}\mathscr{C}_E$当且仅当

$$E_n\overset{l}{\Longrightarrow}E,\quad I_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_E.$$

证明 *充分性* 设C是$(X\times N,\rho_{X\times N})$中的有界集，则存在$A\epsilon\mathscr{B}_{CB}$,使$C\subset A\times N$.由于$I_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_E$，由引理24对所有$n$一致地有

$$\sum_{j>k}jE_n(\mu\colon\ \mu(A)=j)\longrightarrow0,\quad(k\to\infty),$$

但是

$$\sum_{j>k}j\bar{E}_n(\lambda\colon\ \lambda(C)=j)=\int_{(\lambda(C)>k)}\lambda(C)\bar{E}_n(d\lambda)$$

$$\leqslant\int_{(\mu(A)>k)}\mu(A)E_n(d\mu)=\sum_{j>k}jE_n(\mu\colon\ \mu(A)=j),$$

所以对n一致地有

$$\sum_{j>k}j\bar{E}_n(\lambda\colon\ \lambda(C)=j)\longrightarrow0,\quad(k\to\infty),$$

仍由引理24知 $I_{\bar{E}_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_{\bar{E}}$. 但当$A\epsilon\mathscr{B}$，$Y\epsilon$N时

$$I_{\bar{E}}(A\times Y)=\int\lambda(A\times Y)\bar{E}(d\lambda)$$

$$=\int\mu\times\delta_\mu(A\times Y)E(d\mu)=\mathscr{E}_E(A\times Y),$$

所以

$$I_E=\mathscr{E}_E,\quad I_{E_n}=\mathscr{E}_{E_n},\quad n=1,2,\cdots,$$

因此得 $\mathscr{E}_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}\mathscr{E}_E$。

必要性 现设 $\mathscr{E}_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}\mathscr{E}_E$，要证明

$$I_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_E,\qquad E_n\overset{l}{\Longrightarrow}E.$$

分为以下三步进行：

1． 证明 $I_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_E$.如果$f$是$(X,\rho_X)$上的有界连续函数，具有有界支承$A\in\mathscr{B}$。令

$$g(a,\mu)=f(a),\quad (a,\mu)\in X\times N,$$

则$g(a,\mu)$是$(X\times N,\rho_{X\times N})$上的有界连续函数，支承含在$A\times N$之内．由$\mathscr{E}_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}\mathscr{E}_E$得

$$\lim_{n\to\infty}\int f(a)I_{E_n}(da)=\lim_{n\to\infty}\int g(a,\mu)\mathscr{E}_{E_n}(da\times d\mu)$$

$$=\int g(a,\mu)\mathscr{E}_E(da\times d\mu)=\int f(a)I_E(da),$$

从而 $I_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_E$。

2． 任设$A\in\mathscr{B}$，证明对n一致地有

$$\sum_{j>k}jE_n(\mu:\ \mu(A)=j)\longrightarrow 0,\quad (k\to\infty).$$

设$f\in\mathscr{F}_+$，而且$1_A\leqslant f\leqslant 1$。令

$$g(a,\mu)=\int f(a)f(b)\mu(db),$$

则g是$(X\times N,\rho_{X\times N})$上的连续函数，而且具有有界支承。事实上，如果$f$的支承是$B$，则$g$的支承是$B\times N$。对于不同的$x>0$，$g^{-1}(x)$是互不相交的，从而$\mathscr{E}_E(g^{-1}(x))>0$至多对可数多个$x>0$成立。然而

$$\mathscr{E}_E(\partial[g^{-1}(x,\infty)])\leqslant\mathscr{E}_E(g^{-1}(\partial(x,\infty)))=\mathscr{E}_E(g^{-1}(x)),$$

因此可选序$\{x_m\}$，使$x_m\uparrow\infty$且对所有的m，都有

$$\mathscr{E}_E(\partial[g^{-1}(x_m,\infty)])=0,$$

即$g^{-1}(x_m,\infty)$是$\mathscr{E}_E$连续集，而且在$(X\times N,\rho_{X\times N})$中有界，事实上它含在$B\times N$之内。因为 $\mathscr{E}_{E_n}\overset{l}{\Longrightarrow}\mathscr{E}_E$，故对任一$m$都有

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{E}_{E_n}(g^{-1}(x_m,\infty))=\mathscr{E}_E(g^{-1}(x_m,\infty)).$$

现设$\varepsilon>0$任意给定。因为$(x_m,\infty)\downarrow\phi$，从而存在$m_0$，使

$$\mathscr{E}_E(g^{-1}(x_{m_0},\infty))<\varepsilon/2,$$

再选 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时

$$|\mathscr{E}_{E_n}(g^{-1}(x_{m_0},\infty))-\mathscr{E}_E(g^{-1}(x_{m_0},\infty))|<\varepsilon/2,$$

适当增大m_0，无妨认为对一切n都有

$$\mathscr{E}_{E_n}(g^{-1}(x_{m_0},\ \infty))<\varepsilon.$$

现在应用定理3的反演公式，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j>x_{m_0}} jE_n(\mu:\mu(A)=j)\\
&=\sum_{j>x_{m_0}} j(j^{-1}\mathscr{E}_{E_n}(A\times(\mu:\mu(A)=j)))\\
&=\sum_{j>x_{m_0}} \mathscr{E}_{E_n}(A\times(\mu:\mu(A)=j))\\
&=\mathscr{E}_{E_n}(A\times(\mu:\mu(A)>x_{m_0}))\\
&\leqslant\mathscr{E}_{E_n}(g^{-1}(x_{m_0},\ \infty))<\varepsilon,
\end{aligned}$$

从而对n一致地有

$$\sum_{j>k} jE_n(\mu:\mu(A)=j)\longrightarrow 0,\quad (k\to\infty).$$

3. 证明$E_n\overset{l}{\Rightarrow}E$。由于$E,E_n\in\mathscr{E}_\infty$，故存在$P\in\mathscr{P}_{IN},P_n\in\mathscr{P}_{IN}$，使

$$\tilde{P}=E,\quad \tilde{P}_n=E_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

由于$I_{P_n}=I_{\tilde{P}_n}=I_{E_n}$，故由已证明的1知

$$I_{P_n}\overset{l}{\Longrightarrow}I_P.$$

现在我们要证明$\{P_n\}$在$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中是相对紧的。事实上，由于$I_{P_n}\overset{l}{\Rightarrow}I_P$，故$\{I_{P_n}\}$在$(N,\rho_N)$中相对紧。由定理Ⅰ.24知，对任意给定的闭集$A\in\mathscr{B}$以及$\varepsilon>0$，存在$A$的紧子集$A_\varepsilon$使

$$\sup_n I_{P_n}(A)=\sup_n\sum_{j=1}^{\infty} jP_n(\mu:\mu(A)=j)<\infty, \tag{1}$$

$$\sup_n I_{P_n}(A\backslash A_\varepsilon)<\varepsilon, \tag{2}$$

由(1)知，存在正整数$n_{A,\varepsilon}$使

$$\sup_n P_n(\mu:\mu(A)\geqslant n_{A,\varepsilon})<\varepsilon,$$

由(2)推得

$$\sup_n P_n(\mu:\mu(A\backslash A_\varepsilon)\geqslant 1)<\varepsilon,$$

从而根据定理Ⅰ.41，$\{P_n\}$是相对紧的。

于是存在$\{n\}$的子序列$\{n_j\}$及$P'\in\mathscr{P}_N$，使

$$P_{n_j}\overset{w}{\Longrightarrow}P',$$

又由推论11得$P'\in\mathscr{P}_{IN}$。因此又存在$E'\in\mathscr{E}_\infty$，使$\hat{P}'=E'$。根据引理21，$P_{n_j}\overset{w}{\Rightarrow}P'$等价于

$$E_{n_j}\overset{l}{\Longrightarrow}E'.$$

现证明$I_{E'}\in M$。设$A\in\mathscr{B}_{CE'}$，由引理23得

$$I_{E'}(A)\leqslant\liminf_{n_j} I_{E_{n_j}}(A)<\infty,$$

由于对任意的$B\in\mathscr{B}$，总存在$A\supset B$并且$A\in\mathscr{B}_{CE'}$，所以$I_{E'}\in M$。

由引理24得$I_{E_{n_j}}\overset{l}{\Rightarrow}I_{E'}$又由于本定理的充分性部分可得$\mathscr{C}_{E_{n_j}}\overset{l}{\Rightarrow}\mathscr{C}_{E'}$。由局部弱收敛极限的唯一性知$\mathscr{C}_E=\mathscr{C}_{E'}$，最后由Campbell测度的唯一性定理4及$E\in\mathscr{E}_\infty$，$E'\in\mathscr{E}_\infty$知

$E=E'$，证毕。

§6.（弱）无穷小三角序列的收敛

32. 定义 设$\{P_{nj},\ n\in Z_+,1\leqslant j\leqslant k_n\}\subset\mathscr{P}_N$。如果对任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)>0)=0$$

则称$\{P_{nj}\}$是（弱）无穷小三角序列。今后简称为无穷小三角序列。

显然强无穷小三角序列必也是（弱）无穷小三角序列。下面我们要将定理13推广，只有这样推广，才能完全解决无穷小三角序列的收敛性问题。首先证明一个引理，这个引理将引理6的条件减弱了。

33. 引理 设$\Gamma\subset\mathscr{B}$是(X,ρ_X)上的环，$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$。又设对任意的$A\in\mathscr{B}$，存在$B\in\Gamma$使$A\subset B$。如果$P\in\mathscr{P}_N$，则$P\in\mathscr{P}_{IN}$当且仅当对$\Gamma$中任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，$P_{A_1,\cdots,A_m}$是$Z_+^m$值的无穷可分分布。

证明 只证充分性。设$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$且互不相交。由于$P_{A_1,\cdots,A_m}$无穷可分，故存在Z_+^m上的有限测度F，使$P_{A_1,\cdots,A_m}=\mathscr{U}_F$。由于$F$依赖于$A_1,\cdots,A_m$，故记之为$F^{A_1,\cdots,A_m}$。

现设

$$\widetilde{\mathbf{N}}=\bigcup_{A_1,\cdots,A_m}\mathbf{N}_{A_1,\cdots,A_m}$$

其中$A_1,\cdots,A_m$跑遍Γ中一切互不相交的有限集族。则由引理Ⅰ.4知$\widetilde{\mathbf{N}}$是代数并且$\sigma(\widetilde{\mathbf{N}})=\mathbf{N}$。

考虑$\widetilde{\mathbf{N}}$上的集函数E，满足条件：对于互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$，有

$$E(\mu:\ \mu(A_1)=h_1,\cdots,\mu(A_m)=h_m)$$
$$=F^{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m),$$

凡$h_1,\cdots,h_m\in Z_+$.

容易证明E是代数$\widetilde{\mathbf{N}}$上的有限测度，于是可把E扩张为$\mathbf{N}$上的测度，仍记为E。不失一般性，可设$E(\{0\})=0$.

现设$A\in\mathscr{B}$任意。由引理条件，存在$B\in\Gamma$使$A\subset B$，从而

$$E(\mu:\ \mu(A)>0)\leqslant E(\mu:\ \mu(B)>0)$$
$$=\sum_{h>0}F^B(h)<\infty,$$

这说明$E\in\mathscr{E}_\infty$。并且对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\Gamma$都有

$$P_{A_1,\cdots,A_m}=(\mathscr{U}_E)_{A_1,\cdots,A_m},$$

所以由推论Ⅱ.5知$P=\mathscr{U}_E$，即P为无穷可分分布。

下面的定理是定理13的推广。它指出：无穷小三角序列如果弱收敛，则一定收敛于某个无穷可分分布。

34. 定理 $P\in\mathscr{P}_{IN}$的充分必要条件为：存在无穷小三角序列$\{P_{ni}\}$，使

$$\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}\stackrel{w}{\Longrightarrow}P.$$

证明 *必要性* 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$，令

$$P_{nj}=\sqrt[n]{P},\qquad n\in Z_+,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

则显然

$$\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant n}P_{nj}\stackrel{w}{\Longrightarrow}P;$$

往证如上定义的$\{P_{nj}\}$是无穷小三角序列。事实上，设$A\in\mathscr{B}$，由于

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=0)=\sqrt[n]{P}(\mu:\ \mu(A)=0)$$
$$=\sqrt[n]{P(\mu:\ \mu(A)=0)},$$

又由定理Ⅱ.31的5)知

$$P(\mu:\ \mu(A)=0)=\exp\{-\widetilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0)\}>0,$$

从而当$n\to\infty$时有

$$\lim_{n\to\infty}\min_{1\leqslant j\leqslant n}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=0)=1,$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant n}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)>0)=0,$$

所以$\{P_{nj}\}$确是无穷小三角序列。

反之，设$\{P_{nj}\}$是无穷小三角序列，并且

$$\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}\stackrel{w}{\Longrightarrow}P,$$

则由推论9，对一切互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CP}$有

$$\lim_{n\to\infty}\|(\mathop{*}_{1\le j\le k_n}P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}-P_{A_1,\cdots,A_m}\|=0,$$

于是由定理13知 $P_{A_1,\cdots,A_m}$ 是无穷可分的.

现在由引理Ⅱ.44，$\mathscr{B}_{CP}$ 是环，而且

$$L_\sigma(\mathscr{B}_{CP})=\mathscr{B},$$

又由引理Ⅱ.50，对任意 $A\in\mathscr{B}$，存在 $B\in\mathscr{B}_{CP}$ 使

$$A\subset B,$$

故应用引理33即知 $P\in\mathscr{P}_{IN}$.

35. 定理 设 $P\in\mathscr{P}_{IN}$，$\{P_{nj}\}$ 是无穷小三角序列. 则下述命题等价：

1) $\mathop{*}_{1\le j\le k_n}P_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}P$；

2) $\mathop{*}_{1\le j\le k_n}\mathscr{U}_{P_{nj}}\overset{w}{\Longrightarrow}P$；

3) $\sum_{1\le j\le k_n}P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\})\overset{l}{\Longrightarrow}\tilde{P}$.

证明 1)⇒3). 如果1)成立，则对互不相交的 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CP}$，由推论9得

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathop{*}_{1\le j\le k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}-P_{A_1,\cdots,A_m}\|=0,\tag{1}$$

但因为

$$P=\mathscr{U}_{\tilde{P}((\cdot)\setminus\{0\})},$$

故由定理Ⅱ.21知

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{1\le j\le k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\setminus\{0,\cdots,0\})$$

$$-\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\setminus\{0,\cdots,0\})\Big\|=0,\tag{2}$$

于是由引理20得

$$\sum_{1\le j\le k_n}P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\})\overset{l}{\Longrightarrow}\tilde{P},\tag{3}$$

这就是 3).

3)⇒1). 反之，设3)成立. 根据定理Ⅱ.31的8)得

$$I_P=I_{\tilde{P}},$$

从而由引理Ⅱ.45知 $\mathscr{B}_{CP}=\mathscr{B}_{C\tilde{P}}$. 于是由引理20，对任意互不相交的 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{C\tilde{P}}$，上面的(1),(2),(3)等价，即3)⇒1).

又因为

$$\mathop{*}_{1\le j\le k_n}\mathscr{U}_{P_{nj}}=\mathscr{U}_{\sum_{1\le j\le k_n}P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\})},$$

由引理21即知2)与3)等价.

36. 定理 设 $P\in\mathscr{P}_{IN}$，$I_P\in M$，又设 $\{P_{nj}\}$ 是无穷小三角序列，$I_{P_{nj}}\in M$. 则

$$\mathop{*}_{1\leq j\leq k_n} P_{nj} \stackrel{w}{\Longrightarrow} P, \quad \sum_{1\leq j\leq k_n} I_{P_{nj}} \stackrel{l}{\Longrightarrow} I_P,$$

当且仅当

$$\sum_{1\leq j\leq k_n} \mathscr{C}_{P_{nj}} \stackrel{l}{\Longrightarrow} \mathscr{C}_{\tilde{P}}.$$

证明 由定理35，

$$\mathop{*}_{1\leq j\leq k_n} P_{nj} \stackrel{w}{\Longrightarrow} P$$

等价于

$$\mathscr{U}_{\sum_{1\leq j\leq k_n} P_{nj}} \stackrel{w}{\Longrightarrow} P,$$

又等价于

$$\sum_{1\leq j\leq k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\}) \stackrel{l}{\Longrightarrow} \tilde{P},$$

然而

$$I_{\tilde{P}} = I_P, \quad I_{\sum_{1\leq j\leq k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\})} = \sum_{1\leq j\leq k_n} I_{P_{nj}},$$

应用定理31，令

$$E_n = \sum_{1\leq j\leq k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\}), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$E = \tilde{P},$$

并注意

$$\sum_{1\leq j\leq k_n} \mathscr{C}_{P_{nj}} = \mathscr{C}_{\sum_{1\leq j\leq k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\})},$$

即得欲证。

§7. 收敛于Poisson过程

37. 引理 设$\lambda\in M$。则

$$\mathscr{B}_\lambda = \mathscr{B}_{CQ_\lambda},$$

其中Q_λ是由X至N的映象f: $a\frown\delta_a$所诱导的测度：$Q_\lambda = \lambda f^{-1}$.

证明 由$\mathscr{B}_\lambda$的定义知：$A\in\mathscr{B}_\lambda$当且仅当

$$\lambda(\partial A) = 0, \quad A\in\mathscr{B};$$

再由$\mathscr{B}_{CQ_\lambda}$的定义知：$A\in\mathscr{B}_{CQ_\lambda}$当且仅当

$$Q_\lambda(\mu:\ \mu(\partial A) > 0) = 0, \quad A\in\mathscr{B},$$

于是$A\in\mathscr{B}_{CQ_\lambda}$当且仅当

$$I_{Q_\lambda}(\partial A) = \int \mu(\partial A)\, Q_\lambda(d\mu) = \lambda(\partial A) = 0.$$

38．定理 设$\lambda\in M$，$\{P_{nj}\}$是无穷小三角序列。则

$$\mathop{*}_{1\le j\le k_n} P_{nj} \xrightarrow{w} P_\lambda$$

当且仅当对任意的$A\in\mathscr{B}_\lambda$有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)>1)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=1)=\lambda(A).$$

证明 由定理35知

$$\mathop{*}_{1\le j\le k_n} P_{nj} \xrightarrow{w} P_\lambda$$

当且仅当

$$\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\}) \xrightarrow{l} \tilde{P}_\lambda.$$

因为对于Poisson过程P_λ而言有$\tilde{P}_\lambda=Q_\lambda$，所以上式等价于

$$\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\}) \xrightarrow{l} Q_\lambda\ .$$

但由引理20，$\sum\limits_{1\le j\le k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\}) \xrightarrow{l} Q_\lambda$当且仅当对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CQ_\lambda}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{1\le j\le k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\setminus\{0,\cdots,0\})\right.$$

$$\left.-(Q_\lambda)_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\setminus\{0,\cdots,0\})\right\|=0.$$

命

$$e_0=(0,\cdots,0),\quad e_1=(1,0,\cdots,0),\quad e_2=(0,1,0,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots,\ e_m=(0,0,\cdots1,).$$

则由Q_λ的定义知

$$(Q_\lambda)_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\setminus e_0)=\sum_{i=1}^m\lambda(A_i)\delta_{e_i},$$

因此$\sum\limits_{1\le j\le k_n} P_{nj}((\cdot)\setminus\{0\}) \xrightarrow{l} Q_\lambda$等价于对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{CQ_\lambda}$有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{1\le j\le k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\setminus e_0)-\sum_{i=1}^m\lambda(A_i)\delta_{e_i}\right\|=0,$$

由定理7，上式等价于下面两个条件：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash\{e_0,e_1,\cdots,e_m\})=0, \tag{1}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}(e_i)=\lambda(A_i),\quad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{2}$$

条件(1)，(2)显然等价于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A_1\cup\cdots\cup A_m)>1)=0, \tag{3}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A_i)=1)=\lambda(A_i),\quad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{4}$$

由于 $\mathscr{B}_{CQ_\lambda}$ 是环，(3)，(4)又等价于：对任意 $A\in\mathscr{B}_{CQ_\lambda}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A)>1)=0,$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A)=1)=\lambda(A),$$

再由引理37，定理得证。

39. 定理 设 $\{P_{nj}\}$ 是无穷小三角序列，$I_{P_{nj}}\in M$，又设 $\lambda\in M$ 且

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}I_{P_{nj}}\overset{l}{\Longrightarrow}\lambda$$

则

$$\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}P_\lambda$$

当且仅当对任意的 $A\in\mathscr{B}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}(A\times(\mu:\mu(A)>1))=0.$$

证明 *必要性* 由定理36，在本定理已知的条件下，

$$\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}P_\lambda$$

当且仅当

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}\overset{l}{\Longrightarrow}\mathscr{C}_{Q_\lambda}.$$

现设 A 是 $(X,\ \rho_X)$ 中的有界闭集。我们来证明，$\{\mu:\mu(A)>1\}$ 是 $(N,\ \rho_N)$ 中的闭集。事实上，如果 $\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$ 且 $\mu_n(A)\geqslant 2$，$n=1,2,\cdots$，则由定理 I.22的3)得

$$2\leqslant\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A)\leqslant\mu(A),$$

从而 $\mu(A)\geqslant 2$，即 $\{\mu:\mu(A)>1\}$ 是闭集。于是

$$A\times\{\mu:\mu(A)>1\}$$

是 $(X\times N,\ \rho_{X\times N})$ 中的闭集。从而由

$$\sum_{1\leq j\leq k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}\overset{l}{\Longrightarrow}\mathscr{C}_{Q_\lambda}$$

并应用定理 I .22的3)知

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{1\leq j\leq k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}(A\times(\mu:\ \mu(A)>1))$$

$$\leq\mathscr{C}_{Q_\lambda}(A\times(\mu:\ \mu(A)>1))\leq\mathscr{C}_{Q_\lambda}(X\times(\mu:\ \mu(A)>1))=0,$$

现设 $A\in\mathscr{B}$ 任意，以 $\bar{A}$ 记 A 的闭包，则

$$A\times\{\mu:\ \mu(A)>1\}\subset\bar{A}\times\{\mu:\ \mu(\bar{A})>1\}$$

从而

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{1\leq j\leq k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}(A\times(\mu:\ \mu(A)>1))$$

$$\leq\limsup_{n\to\infty}\sum_{1\leq j\leq k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}(\bar{A}\times(\mu:\ \mu(\bar{A})>1))=0,$$

必要性得证。

充分性　现设对任意的 $A\in\mathscr{B}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq j\leq k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}(A\times(\mu:\ \mu(A)>1))=0,$$

由反演公式定理 3 知

$$\sum_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)>1)=\sum_{1\leq j\leq k_n}\sum_{l=2}^{\infty}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=l)$$

$$=\sum_{1\leq j\leq k_n}\sum_{l=2}^{\infty}l(l^{-1}\mathscr{C}_{P_{nj}}(A\times(\mu:\ \mu(A)=l)))$$

$$=\sum_{1\leq j\leq k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}(A\times(\mu:\ \mu(A)>)\longrightarrow 0,\qquad (n\to\infty).$$

现设 $A\in\mathscr{B}_\lambda$，则由

$$\sum_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=1)$$

$$=\sum_{1\leq j\leq k_n}I_{P_{nj}}(A)-\sum_{1\leq j\leq k_n}\mathscr{C}_{P_{nj}}(A\times(\mu:\ \mu(A)>1)),$$

以及条件

$$\sum_{1\leq j\leq k_n}I_{P_{nj}}\overset{l}{\Longrightarrow}\lambda$$

推得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=1)=\lambda(A),$$

从而由定理36得

$$\mathop{*}_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}P_\lambda.$$

§8. 收敛于 Gauss–Poisson 过程

40. 定理 设 $P\in\mathscr{P}_{IN}$ 是 Gauss-Poisson 分布，而且

$$-\log\Psi_P(f)=\int(1-\exp(-f(a)))\gamma_1(da)$$
$$+\iint(1-\exp(-f(a)-f(b)))\,\gamma_2(da\times db),\qquad f\in\mathscr{F}_{m+}.$$

其中 $\gamma_1\in M$，γ_2 是 $(X^2,\ \mathscr{A}^2)$ 上的对称测度，满足条件：对任意的 $A\in\mathscr{B}$，$\gamma_2(A\times X)<\infty$。命

$$\lambda(\cdot)=\gamma_1(\cdot)+2\gamma_2(\cdot\times X).$$

现设 $\{P_{n_j}\}$ 是无穷小三角序列，则

$$\mathop{*}_{1\leq j\leq k_n} P_{n_j}\overset{w}{\Longrightarrow}P$$

当且仅当对任意互不相交的 $A,\ B\in\mathscr{B}_\lambda$，有

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A)>2)=0;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A)=1,\mu(B)=0)=\gamma_1(A)+2\gamma_2(A\times(A\cup B)^c);$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}(\mu:(A)=1,\mu(B)=1)=2\gamma_2(A\times B);$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A)=2)=\gamma_2(A\times A).$

证明 由定理35知

$$\mathop{*}_{1\leq j\leq k_n} P_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}P$$

当且仅当

$$\sum_{1\leq j\leq k_n}P_{nj}((\cdot)\backslash\{0\})\overset{l}{\Longrightarrow}\tilde{P}.$$

由引理20知，这个条件又等价于对任意互不相交的 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{c\tilde{P}}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{1\leq j\leq k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))$$
$$-\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash(0,\cdots,0))\Big\|=0.$$

命

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,0,\cdots,0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_m=(0,\cdots,0,1)$$

是 Z_+^m 中的m个点，由Gauss-Poisson过程的定义可知

$$\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}(e_i)=\gamma_1 g_1^{-1}(\mu:\mu(A_i)=1,\mu(A_j)=0,j\neq i)$$

$$+\gamma_2 g_2^{-1}(\mu:\mu(A_i)=1,\mu(A_j)=0,j\neq i)$$

其中g_1,g_2是在第Ⅱ章§7中定义的映象。

于是

$$\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}(e_i)=\gamma_1(A_i)+2\gamma_2(A_i\times(A_1\cup\cdots\cup A_m)^c),$$

$$\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}(e_i+e_j)=2\gamma_2(A_i\times A_j),\quad i\neq j,$$

$$\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}(2e_i)=\gamma_2(A_i\times A_i).$$

从而得到

$$\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot))\backslash\{0\})$$

$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\gamma_1(A_i)\,\delta_{e_i}+2\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\gamma_2(A_i\times(A_1\cup\cdots\cup A_m)^c)\delta_{e_i}$$

$$+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\gamma_2(A_i\times A_j)\delta_{e_i+e_j},$$

因此 $\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}((\cdot))\backslash\{0\})\overset{l}{\Longrightarrow}\tilde{P}$等价于对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_{cp}$有

$$\lim_{n\to\infty}\Bigg\|\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot))\backslash\{0\})$$

$$-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\gamma_1(A_i)\delta_{e_i}-2\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\gamma_2(A_i\times(A_1\cup\cdots\cup A_m)^c)\delta_{e_i}$$

$$-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\gamma_2(A_i\times A_j)\delta_{e_i+e_j}\Bigg\|=0,$$

由定理7，上式又等价于下面的条件：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}((\cdot)\backslash\{e_1,\cdots,e_m,2e_1,\cdots,2e_m\})=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}(e_i)=\gamma_1(A_i)+$

$+2\gamma_2(A_i\times(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)),\ 1\leqslant i\leqslant m$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}(e_i+e_l)=2\gamma_2(A_i\times A_l),i\neq l$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}(P_{nj})_{A_1,\cdots,A_m}(2e_i)=\gamma_2(A_i\times A_i),\ 1\leqslant i\leqslant m,$

由于$\mathscr{B}_{cp}$是环，所以上面的条件(1)～(4)等价于：对$\mathscr{B}_{cp}$中任意两个不相交的A,B有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A)>2)=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\mu(A)=1,\mu(B)=0)=\gamma_1(A)+2\gamma_2(A\times(A\cup B)^c);$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=1,\mu(B)=1)=2\gamma_2(A\times B);$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=2)=\gamma_2(A\times A).$$

最后，为了完成定理的证明，我们还得证明$\mathscr{B}_{c\tilde{P}}=\mathscr{B}_\lambda$．设$A\in\mathscr{B}_{c\tilde{P}}$，则按定义有

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(\partial A)>0)=0,$$

这显然等价于$\gamma_1(\partial A)=0$及$\gamma_2(\partial A\times X)=0$，即等价于$\lambda(\partial A)=0$．

由定理Ⅱ.52，上述定理可以改为如下等价形式．

41．定理 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$是Gauss-Poisson分布，并且

$$-\log\Psi_P(f)=\int(1-e^{-f(a)})\lambda(da)-\iint(1-e^{-f(a)})\times(1-e^{-f(b)})H(da\times db),\qquad f\in\mathscr{F}_{m+},$$

其中$\lambda\in M$，H是$(X\times X,\mathscr{A}\times\mathscr{A})$上的对称局部有限测度，满足条件：对任意的$A,B\in\mathscr{A}$有

$$H(A\times B)\leqslant\frac{1}{2}\min(\lambda(A),\lambda(B)).$$

现设$\{P_{nj}\}$是无穷小三角序列，则

$$\mathop{*}_{1\le j\le k_n} P_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}P$$

当且仅当对任意互不相交的$A,B\in\mathscr{B}_\lambda$，有

1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)>2)=0;$

2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=1,\mu(B)=0)=\lambda(A)-2H(A\times(A\cup B));$

3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=1,\mu(B)=1)=2H(A\times B);$

4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le j\le k_n} P_{nj}(\mu:\ \mu(A)=2)=H(A\times A).$

证明　应用定理Ⅱ.52的证明并注意

$$\lambda(A)=\gamma_1(A)+2\gamma_2(A\times X),$$

$$H(A\times B)=\gamma_2(A\times B),$$

然后根据上面的定理40即得欲证．

§9．收敛于正则无穷可分分布

42． 本节恒设P是正则无穷可分分布，而且

$$-\log\Psi_P(f)=\sum_{k\in Z_+}\int\cdots\int(1-\exp(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)))\gamma_k(da_1\times\cdots\times da_k),\ f\in\mathscr{F}_{m+},$$

其中γ_k是$(X^k, \mathscr{A}^k)$上的完全对称测度，满足条件：对任意的$A \in \mathscr{B}$，

$$\sum_{k \in Z_+} \gamma_k(X^k \backslash (A^c)^k) < \infty.$$

如果令g_k是在第Ⅱ章§8中定义的映象，则

$$\tilde{P} = \sum_{k \in Z_+} \gamma_k g_k^{-1},$$

因此对任意互不相交的$A_1, \cdots, A_m \in \mathscr{B}$，以及非负的$h_1, \cdots, h_m \in Z_+$，容易算出

$$\tilde{P}(\mu: \ \mu(A_1) = h_1, \cdots, \mu(A_m) = h_m)$$

$$= \sum_{h \in Z_+} \gamma_{h_1 + \cdots + h_m + h} \, g^{-1}_{h_1 + \cdots + h_m + h}(\mu: \mu(A_1) = h_1, \cdots, \mu(A_m) = h_m)$$

$$= \sum_{h \in Z_+} \frac{(h_1 + \cdots + h_m + h)!}{h_1! \cdots h_m! h!} \gamma_{h_1 + \cdots + h_m + h} \left[A_1^{h_1} \times \cdots \times A_m^{h_m} \times ((A_1 \cup \cdots \cup A_m)^c)^h \right],$$

应用这一结果，我们就得到如下的收敛定理。

43. 定理 设P是正则无穷可分分布，其Laplace变换如上所述。记

$$\lambda(\cdot) = \sum_{k \in Z_+} \gamma_k(\cdot \times X^{k-1}).$$

现设$\{P_{nj}\}$是无穷小三角序列，则

$$\mathop{*}_{1 \le j \le k_n} P_{nj} \stackrel{w}{\Longrightarrow} P$$

当且仅对任意的$m \geqslant 1$及任意互不相交的$A_1, \cdots, A_m \in \mathscr{B}_\lambda$以及任意的$h_1 + \cdots + h_m > 0$有

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{1 \le j \le k_n} P_{nj}(\mu: \mu(A_1) = h_1, \cdots, \mu(A_m) = h_m)$$

$$= \sum_{h \in Z_+} \frac{(h_1 + \cdots + h_m + h)!}{h_1! \cdots h_m! h!} \gamma_{h_1 + \cdots + h_m + h} (A_1^{h_1} \times \cdots \times A_m^{h_m} ((A_1 \cup \cdots \cup A_m)^c)^h).$$

证明 由定理35及定理20知

$$\sum_{1 \le j \le k_n} P_{nj}((\cdot) \backslash \{0\}) \stackrel{l}{\Longrightarrow} \tilde{P}$$

是

$$\mathop{*}_{1 \le j \le k_n} P_{nj} \stackrel{w}{\Longrightarrow} P$$

的充分必要条件，而这又等价于：对任意互不相交的$A_1, \cdots, A_m \in \mathscr{B}_{c\tilde{P}}$，有

$$\lim_{n \to \infty} \Big\| \sum_{1 \le j \le k_n} (P_{nj})_{A_1, \cdots, A_m}((\cdot) \backslash (0, \cdots, 0))$$

$$- \tilde{P}_{A_1, \cdots, A_m}((\cdot) \backslash (0, \cdots, 0)) \Big\| = 0,$$

由于对任意的$h_1 + \cdots + h_m > 0$有

$$\tilde{P}_{A_1,\cdots,A_m}(\mu:\mu(A_1)=h_1,\cdots,\mu(A_m)=h_m)$$

$$=\sum_{h\in Z_+}\frac{(h_1+\cdots+h_m+h)!}{h_1!\cdots h_m!h!}\gamma_{h_1+\cdots+h_m+h}[A_1^{h_1}\times\cdots\times A_m^{h_m}\times((A_1\cup\cdots\cup A_m)^c)^h],$$

因此只须证明$\mathscr{B}_{c\tilde{P}}=\mathscr{B}_\lambda$,而这与定理40中的证明完全一样。

在上面的定理中。如果P是Gauss-Poisson过程，则容易得到定理40中的 条件1)～4)。

现设$P\in\mathscr{P}_{IN}$是m-正则的无穷可分分布($m>2$),这时定理43中的γ_k当$k>m$时全为0，并且

$$\lambda(\cdot)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(\cdot\times X^{k-1}).$$

这时

$$\mathop{*}_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}\overset{w}{\Longrightarrow}P$$

当且仅当对任意互不相交的$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}_\lambda$以及任意$h_1,\cdots,h_m\in Z_+$, $0<h_1+\cdots+h_m\leqslant m$有

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A_1)>m)=0$;

2) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant j\leqslant k_n}P_{nj}(\mu:\mu(A_1)=h_1,\cdots,\mu(A_m)=h_m)$$

$$=\sum_{\substack{h\in Z_+\\ h_1+\cdots+h_m+h\leqslant m}}\frac{(h_1+\cdots+h_m+h)!}{h_1!\cdots h_m!h!}\gamma_{h_1+\cdots+h_m+h}[A_1^{h_1}\times\cdots\times A_m^{h_m}$$

$$\times((A_1\cup\cdots\cup A_m)^c)^h].$$

第五章　混合型Poisson分布

§1. 广义卷积

1. 定义　首先我们注意，在定义Ⅰ.54中虽然只对E_1，$E_2 \in \mathscr{E}_+$定义了卷积$E_1 * E_2$，其实当E_1, E_2都是$(N, \mathbf{N})$上的σ有限测度时，仍可用相同的方式定义$E_1 * E_2$。这个注意我们今后将不再申明地用到。

现在考虑映象

$$\Psi:\ (a,\mu,\lambda) \frown (a,\mu+\lambda),\ a \in X, \mu, \lambda \in N,$$

这是$(X \times N \times N,\ \mathscr{A} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N})$到$(X \times N,\ \mathscr{A} \times \mathbf{N})$的可测映象。

现设V是$\mathscr{A} \times \mathbf{N}$上的$\sigma$有限测度，$H$是$\mathbf{N}$上的$\sigma$有限测度。在映象$\Psi$之下，由$V \times H$所诱导的$\mathscr{A} \times \mathbf{N}$上的测度称为$V$与$H$的广义卷积，记为$V \otimes H$。

由定义，对于$A \in \mathscr{A}$，$Y \in \mathbf{N}$，有

$$
\begin{aligned}
V \otimes H(A \times Y) &= (V \times H)\Psi^{-1}(A \times Y) \\
&= (V \times H)((a,\mu,\lambda):\ (a,\mu+\lambda) \in A \times Y) \\
&= \iiint 1_{A \times Y}(a,\mu+\lambda) V \times H(da \times d\mu \times d\lambda) \\
&= \iint 1_Y(\mu+\lambda) V(A \times d\mu) H(d\lambda) \\
&= (V(A \times \cdot) * H)(Y),
\end{aligned}
$$

所以对于任意的$A \in \mathscr{A}$，$Y \in \mathbf{N}$有

$$(V \otimes H)(A \times Y) = (V(A \times \cdot) * H)(Y).$$

2. 引理　设V是$\mathscr{A} \times \mathbf{N}$上的$\sigma$有限测度，$H$是$\mathbf{N}$上的$\sigma$有限测度，$W$是$\mathscr{A} \times \mathbf{N}$上的测度。$W = V \otimes H$当且仅当对任意的$A \in \mathscr{B}$，$Y \in \mathbf{N}$，有

$$W(A \times Y) = (V(A \times \cdot) * H)(Y).$$

证明　必要性如前所述，充分性利用通常的单调类定理。

3. 引理　设V是$\mathscr{A} \times \mathbf{N}$上的$\sigma$有限测度，$H_1, H_2$是$\mathbf{N}$上的$\sigma$有限测度。如果$H_1 * H_2$及$V \otimes H_1$都是相应空间的$\sigma$有限测度，则

$$(V \otimes H_1) \otimes H_2 = V \otimes (H_1 * H_2).$$

证明　设$A \in \mathscr{B}$，由引理2，上式两边都是

$$V(A \times \cdot) * H_1 * H_2,$$

得证。

4. 定义　设$(\Omega \mathscr{T})$是任意的可测空间，f_w是$(\Omega, \mathscr{T})$到$(\mathscr{E}_+, \rho_{\mathscr{E}_+})$的映象，以$\mathscr{A}(\mathscr{E}_+)$记距离空间$(\mathscr{E}_+, \rho_{\mathscr{E}_+})$中的Borel集类。则$f_w$是$(\Omega, \mathscr{T})$到$(\mathscr{E}_+, \rho_{\mathscr{E}_+})$的可测映象当且仅当对$\mathscr{B}$中互不相交的$A_1, \cdots, A_m$，以及非负整数$k_1, \cdots, k_m$，实函数

$$\omega \frown f_\omega(\mu:\ \mu(A_1)=k_1,\cdots,\mu(A_m)=k_m)$$

是可测的。这个结果可由单调类定理得到。

现设S是$(\Omega,\mathscr{F})$上的σ有限测度，则以下式

$$\left(\int f_\omega S(d\omega)\right)(\cdot) \triangleq \int f_\omega(\cdot)S(d\omega)$$

定义测度$\int f_\omega S(d\omega)$。

5．引理 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$是两个可测空间，f_{ω_1}，g_{ω_2}分别是$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$到$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$的可测映象。则

$$(\omega_1,\omega_2)\frown f_{\omega_1} * g_{\omega_2}$$

是$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$到$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$的可测映象。

又设S,T分别是$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$上的σ有限测度，则

$$\left(\int f_{\omega_1}S(d\omega_1)\right) * \left(\int g_{\omega_2}T(d\omega_2)\right)(\cdot)$$

$$=\int (f_{\omega_1} * g_{\omega_2})(\cdot)(S\times T)(d\omega_1\times d\omega_2).$$

证明 首先假定S,T都是有限测度。又设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$并且互不相交，$k_1,\cdots,k_m\in Z_+$，则

$$(f_{\omega_1} * g_{\omega_2})(\mu:\ \mu(A_i)=k_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)$$

$$=\sum_{\substack{h_i+j_i=k_i\\ 1\leqslant i\leqslant m}} f_{\omega_1}(\mu:\ \mu(A_i)=h_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m)$$

$$\times g_{\omega_2}(\mu:\ \mu(A_i)=j_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m),$$

从而

$$(\omega_1,\omega_2)\frown f_{\omega_1} * g_{\omega_2}$$

是$(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$到$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$的可测映象。又由定义知

$$\left(\left(\int f_{\omega_1}S(d\omega_1)\right) * \left(\int g_{\omega_2}T(d\omega_2)\right)\right)(\mu:\ \mu(A_i)=k_i,\ \ 1\leqslant i\leqslant m)$$

$$=\sum_{\substack{h_i+j_i=k_i\\ 1\leqslant i\leqslant m}}\left(\int f_{\omega_1}(\mu:\ \mu(A_i)=h_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)\,S(d\omega_1)\right)$$

$$\times\left(\int g_{\omega_2}(\mu:\ \mu(A_i)=j_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)\,T(d\omega_2)\right)$$

$$=\int (f_{\omega_1} * g_{\omega_2})(\mu:\ \mu(A_i)=k_i\ \ 1\leqslant i\leqslant m)S\times T(d\omega_1\times d\omega_2),$$

应用单调类定理，我们得

$$\left(\int f_{\omega_1}S(d\omega_1)\right) * \left(\int g_{\omega_2}T(d\omega_2)\right)(\cdot)$$

$$=\left(\int (f_{\omega_1} * g_{\omega_2})(S\times T)(d\omega_1\times d\omega_2)\right)(\cdot);$$

当S，T是σ有限测度时，取$\Omega_n^{(1)}\in\mathscr{T}_1$，$\Omega_n^{(2)}\in\mathscr{T}_2$使$\Omega_n^{(1)}\uparrow\Omega_1$，$\Omega_n^{(2)}\uparrow\Omega_2$，则$\Omega_n^{(1)}\times\Omega_n^{(2)}\uparrow\Omega_1\times\Omega_2$. 在$\Omega_n^{(1)}\times\Omega_n^{(2)}$上应用上面所得的结果，令$n\to\infty$则得引理的结论.

6．定义 设$(\Omega,\mathscr{T})$是可测空间，$\{S_\delta,\delta\in\Delta\}$是$(\Omega,\mathscr{T})$上的一族测度，称$\{S_\delta,\delta\in\Delta\}$是一致$\sigma$有限的，如果存在$\Omega_n\in\mathscr{T}$，$\Omega_n\uparrow\Omega$使

$$S_\delta(\Omega_n)<\infty,\quad \delta\in\Delta,\quad n=1,2,\cdots.$$

7．引理 设$(\Omega_1,\mathscr{T}_1)$，$(\Omega_2,\mathscr{T}_2)$是两个可测空间. 如果对任意$\omega_1\in\Omega_1$，V_{ω_1}是$\mathscr{A}\times\mathbf{N}$上的测度，而且$\{V_{\omega_1},\ \omega_1\in\Omega_1\}$是一致$\sigma$有限的；又设对任意$\omega_2\in\Omega_2$，$H_{\omega_2}\in\mathscr{E}_+$，映像

$$\omega_1\frown V_{\omega_1},\quad \omega_2\frown H_{\omega_2}$$

都是相应空间的可测映像. 则任对意$Z\in\mathscr{A}(X\times\mathbf{N})$，

$$(\omega_1,\omega_2)\frown(V_{\omega_1}\otimes H_{\omega_2})(Z)$$

是$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{T}_1\times\mathscr{T}_2)$上的可测函数.

又如果S，T分别是$\mathscr{T}_1$，$\mathscr{T}_2$上的σ有限测度，而且

$$V=\int V_{\omega_1}S(d\omega_1),\quad H=\int H_{\omega_2}T(d\omega_2)$$

都是σ有限测度，则

$$V\otimes H=\int (V_{\omega_1}\otimes H_{\omega_2})(S\times T)(d\omega_1\times d\omega_2).$$

证明 由于$\{V_{\omega_1},\ \omega_1\in\Omega_1\}$是一致$\sigma$有限的，故可取$L_n\in\mathscr{A}(X\times N)$使$L_n\uparrow X\times N$，并且

$$V_{\omega_1}(L_n)<\infty,\quad \omega_1\in\Omega_1,\quad n=1,2,\cdots.$$

现设$A\in\mathscr{B}$，$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，$k_1,\cdots,k_m\in Z_+$，则

$$V_{\omega_1}((\cdot)\cap L_n)\otimes H_{\omega_2}(A\times(\mu:\ \mu(A_i)=k_i,\ 1\leqslant i\leqslant m))$$

$$=\sum_{\substack{h_i+j_i=k_i\\ 1\leqslant i\leqslant m}} V_{\omega_1}(A\times(\mu:\ \mu(A_i)=h_i,\ 1\leqslant i\leqslant m))$$

$$\times H_{\omega_2}(\mu:\ \mu(A_i)=j_i,\ 1\leqslant i\leqslant m),$$

于是映像

$$(\omega_1,\omega_2)\frown(V_{\omega_1}((\cdot)\cap L_n)\otimes H_{\omega_2})(\cdot)$$

是$\Omega_1\times\Omega_2$到$\mathscr{E}_+(X\times N)$的可测映像. 然而

$$(V_{\omega_1}\otimes H_{\omega_2})(\cdot)=\sup_n (V_{\omega_1}((\cdot)\cap L_n)\otimes H_{\omega_2})(\cdot),$$

将前面的等式积分，利用引理2及引理5得

$$\int (V_{\omega_1}((\cdot)\cap L_n)\otimes H_{\omega_2})(A\times\cdot)(S\times T)(d\omega_1\times d\omega_2)$$

$$=\left(\int V_{\omega_1}((\cdot)\cap L_n)\,S(d\omega_1)\right)\otimes\left(\int H_{\omega_2}\,T(d\omega_2)\right)(A\times\cdot),$$

再令$n\to\infty$，得引理中所述的等式.

§2. 无穷可分点过程的 Campbell 测度

8. 引理 设 Δ 是指标集，其元素至多可列，$\{P_i,\ i\in\Delta\}$ 是 $(N,\ \mathbf{N})$ 上的分布族。如果 $\underset{i\in\Delta}{*} P_i$ 存在，则

$$\mathscr{C}_{\underset{i\in\Delta}{*} P_i}=\sum_{i\in\Delta}\mathscr{C}_{P_i}\otimes(\underset{\substack{j\in\Delta\\ j\neq i}}{*} P_j).$$

证明 如 Ⅱ. §4，以 N_Δ 记满足条件 $\sum_{i\in\Delta}\mu_i\in N$ 的所有 $\{\mu_i,\ i\in\Delta\}$。设 $\{\mu_i,\ i\in\Delta\}\in N_\Delta$，令 $\mu=\sum_{i\in\Delta}\mu_i$，则对任意的 $A\in\mathscr{B}$，有

$$\mu\times\delta\mu(A\times\cdot)=\sum_{i\in\Delta}\mu_i\times\delta\mu(A\times\cdot)=\sum_{i\in\Delta}\mu_i(A)\times(\delta_{\mu_i}*\delta_{\mu-\mu_i}),$$

从而由引理 2 得：

$$\mu\times\delta\mu=\sum_{i\in\Delta}(\mu_i\times\delta_{\mu_i})\otimes\delta_{\mu-\mu_i}=\sum_{i\in\Delta}(\mathscr{C}_{\delta_{\mu_i}}\otimes\delta_{\sum_{j\neq i}\mu_j}),$$

由此得：

$$\mathscr{C}_{\underset{i\in\Delta}{*} P_i}=\int\mu\times\delta\mu(\underset{i\in\Delta}{*} P_i)(d\mu)=\sum_{i\in\Delta}\int_{N_\Delta}(\mathscr{C}_{\delta_{\mu_i}}\otimes\delta_{\sum_{j\neq i}\mu_j})(\underset{j\in\Delta}{\times} P_j)(\underset{j\in\Delta}{\times} d\mu_j)$$

$$=\sum_{i\in\Delta}\int(\mathscr{C}_{\delta_{\mu_i}}\otimes\delta\lambda)[P_i*(\underset{j\neq i}{*} P_j)](d\mu_i\times d\lambda);$$

其中 $\lambda=\sum_{j\neq i}\mu_j$。注意到对于任意 $A\in\mathscr{B}$，有

$$\mathscr{C}_{\delta\mu}(A\times N)=\int\nu(A)\,\delta\mu(d\nu)=\mu(A)<\infty,$$

所以 $\{\mathscr{C}_{\delta\mu},\ \mu\in N\}$ 是一致 σ 有限的。应用引理 7，可得

$$\mathscr{C}_{\underset{i\in\Delta}{*} P_i}=\sum_{i\in\Delta}\left(\int\mathscr{C}_{\delta_{\mu_i}}P_i(d\mu_i)\right)\otimes\left(\int\delta\lambda(\underset{j\neq i}{*} P_j)(d\lambda)\right)$$

$$=\sum_{i\in\Delta}\mathscr{C}_{P_i}\otimes(\underset{j\neq i}{*} P_j).$$

9. 定理 设 $P\in\mathscr{S}_{IN}$，则

$$\mathscr{C}_P=\mathscr{C}_{\tilde{P}}\otimes P.$$

证明 记 $\tilde{P}=\sum_{i\in\Delta}E_i\ (E_i\in\mathscr{E}_+,\ E_i(0)=0)$ 是 P 的典则测度。由引理 8 知

$$\mathscr{C}_P=\mathscr{C}_{\underset{i\in\Delta}{*} P_i}=\sum_{i\in\Delta}\mathscr{C}_{P_i}\otimes\underset{j\neq i}{*} P_j,$$

其中 $P_i=\mathscr{U}_{E_i}$，$i\in\Delta$。

如果 $E_i=0$，则 $\mathscr{C}_{P_i}=0=\mathscr{C}_{E_i}\otimes P_i$；当 $E_i\neq0$ 时，得

$$\mathscr{C}_{P_i}=e^{-E_i(N)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathscr{C}_{(E_i)^n},$$

但由引理8可知

$$\mathscr{C}_{(E_i)^n}=n\,\mathscr{C}_{E_i}\otimes E_i^{n-1},$$

所以

$$\mathscr{C}_{P_i}=e^{-E_i(N)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\mathscr{C}_{E_i}\otimes E_i^{n-1}$$

$$=\mathscr{C}_{E_i}\otimes\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-E_i(N)}\frac{1}{n!}E_i^n\right)=\mathscr{C}_{E_i}\otimes P_i,$$

从而由引理7，8得

$$\mathscr{C}_P=\sum_{i\in\Delta}(\mathscr{C}_{\tilde{P}_i}\otimes P_i)\otimes(\underset{j\neq i}{*}P_j)$$

$$=\sum_{i\in\Delta}\mathscr{C}_{\tilde{P}_i}\otimes(\underset{j\in\Delta}{*}P_j)=\left(\sum_{j\in\Delta}\mathscr{C}_{\tilde{P}_j}\right)\otimes P=\mathscr{C}_{\tilde{P}}\otimes P.$$

上述定理的逆定理仍然成立。

10．定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，V是$(X\times N,\ \mathscr{A}(X\times N))$上的$\sigma$有限测度，满足条件

$$V(A\times(\mu:\mu(A)=0))=0,\qquad A\in\mathscr{B};$$

并且

$$\mathscr{C}_P=V\otimes P,$$

则$P\in\mathscr{P}_{IN}$，而且$V=\mathscr{C}_{\tilde{P}}$。

证明 证明分为如下几步：

1）设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$，$A_1\supset A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_m$，$k_1,\cdots,k_m\in Z_+$，$k_1>0$。由反演公式（Ⅳ.定理3）可知

$$P_{A_1,\cdots,A_m}(k_1,\cdots,k_m)=\frac{1}{k_1}\mathscr{C}_P(A_1\times(\mu:\mu(A_i)=k_i,1\leqslant i\leqslant m)),$$

但由假定$\mathscr{C}_P=V\otimes P$，故由引理2上式成为：

$$k_1P_{A_1,\cdots,A_m}(k_1,\cdots,k_m)=(V(A_1\times\cdot)*P)(\mu:\mu(A_i)=k_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)$$

$$=\sum_{j_1=0}^{k_1}\cdots\sum_{j_m=0}^{k_m}V(A_1\times(\mu:\mu(A_i)=k_i-j_i,\ 1\leqslant i\leqslant m))P_{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m);$$

如果上式右边出现$\infty\cdot0$的形式，令它为0，但在下面我们立即证明，不会发生这种情况。

2）设$h_1,\cdots,h_m\geqslant0$，记

$$V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)=V(A_1\times(\mu:\mu(A_i)=h_i,\ 1\leqslant i\leqslant m)),$$

由于$V(A_1\times(\mu:\mu(A_1)=0))=0$，从而对一切$h_2,\cdots,h_m\geqslant 0$，有

$$
\begin{aligned}
&V_{A_1,\cdots,A_m}(0,\ h_2,\cdots,h_m)\\
&=V(A_1\times(\mu:\mu(A_1)=0,\ \mu(A_i)=h_i,\ 2\leqslant i\leqslant m))\\
&\leqslant V(A_1\times(\mu:\mu(A_1)=0))=0.
\end{aligned}
$$

3) 如果$P_{A_1}(\{0\})=1$，则

$$\mathscr{C}_P(A_1\times N)=\int\mu(A_1)P(d\mu)=0,$$

又因为

$$\mathscr{C}_P(A_1\times N)=(V(A_1\times\cdot)*P)(N)=V(A_1\times N)P(N)=V(A_1\times N)=0,$$

故对一切$h_1,\cdots,h_m\geqslant 0$，有

$$V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)=0.$$

4) 如果$P_{A_1}(\{0\})<1$，则存在$j_1>0$，$P_{A_1}(j_1)>0$，又因为

$$0<P_{A_1}(j_1)=\sum_{j_2,\cdots,j_m\in Z_+}P_{A_1,\cdots,A_m}(j_1,j_2,\cdots,j_m),$$

故存在$j_2,\cdots,j_m\geqslant 0$使$P_{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m)>0$，于是由1)得

$$
\begin{aligned}
&V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)P_{A_1,\cdots,A_m}(j_1,\cdots,j_m)\\
&\leqslant(h_1+j_1)P_{A_1,\cdots,A_m}(h_1+j_1,\cdots,h_m+j_m)<\infty,
\end{aligned}
$$

从而对一切$h_1,\cdots,h_m\in Z_+$，$V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)$都是有限的；又由上式知，对一切$h_1>0$，还有

$$V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)\leqslant ch_1,$$

其中$c>0$是常数。上式对$h_1=0$也成立，因为由2)有$V_{A_1,\cdots,A_m}(0,\ h_2,\cdots,h_m)=0$。

5) 现设

$$P(\xi_1,\cdots,\xi_m)=\sum_{k_1,\cdots,k_m\in Z_+}P_{A_1,\cdots,A_m}(k_1,\cdots,k_m)\xi_1^{k_1}\cdots\xi_m^{k_m},$$

$$V(\xi_1,\cdots,\xi_m)=\sum_{k_1,\cdots,k_m\in Z_+}V_{A_1,\cdots,A_m}(k_1,\cdots,k_m)\xi_1^{k_1}\cdots\xi_m^{k_m},$$

由4)得知上述二级数在$|\xi_1|<1,\cdots|\xi_m|<1$内收敛。由1)得

$$\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}P(\xi_1,\cdots,\xi_m)=V(\xi_1,\cdots,\xi_m)P(\xi_1,\cdots,\xi_m),$$

由于$V_{A_1,\cdots,A_m}(0,h_2,\cdots,h_m)=0$，所以上式两边可用$\xi_1\neq 0$除之而得

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}P(\xi_1,\cdots,\xi_m)=\xi_1^{-1}V(\xi_1,\cdots,\xi_m)P(\xi_1,\cdots,\xi_m).$$

6) 在上面的微分方程中，令$m=1$，注意到$V_{A_1}(0)=0$得：

$$\frac{d}{d\xi_1}\Big(\sum_{k\in Z_+}P_{A_1}(k)\xi_1^k\Big)=\Big(\sum_{k\in Z_+}V_{A_1}(k)\xi_1^{k-1}\Big)\Big(\sum_{k\in Z_+}P_{A_1}(k)\xi_1^k\Big),$$

如果 $P_{A_1}(0)=0$，则比较两边系数得

$$P_{A_1}(1)=P_{A_1}(2)=\cdots=0,$$

这与 $\sum_{k\in Z_+} P_{A_1}(k)=1$ 矛盾，故总有 $P_{A_1}(0)>0$。

又因为我们假定了 $A_1\supset A_2\cup\cdots\cup A_m$，故

$$(\mu:\ \mu(A_1)=0)\subset(\mu:\ \mu(A_1)=0,\mu(A_2)=0,\cdots,\mu(A_m)=0),$$

从而总有 $P_{A_1,\cdots,A_m}(0,\cdots,0)=P_{A_1}(0)>0$。

所以5)中的微分方程可写为

$$\frac{1}{P(\xi_1,\cdots,\xi_m)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}P(\xi_1,\cdots,\xi_m)=\xi_1^{-1}V(\xi_1,\cdots,\xi_m);$$

因为 $A_1\supset A_2\cup\cdots\cup A_m$，　故当 $j_2+\cdots+j_m>0$ 时，

$$P_{A_1,\cdots,A_m}(0,j_2,\cdots,j_m)=0,$$

因此得

$$P(0,\xi_2,\cdots,\xi_m)=P(0,\cdots,0)>0.$$

7） 现在解微分方程

$$\frac{1}{P(\xi_1,\cdots,\xi_m)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}P(\xi_1,\cdots,\xi_m)=\xi_1^{-1}V(\xi_1,\cdots,\xi_m),$$

$$P(0,\xi_2,\cdots,\xi_m)=P(0,\cdots,0);$$

它的解只能是

$$\begin{aligned}&P(\xi_1,\cdots,\xi_m)\\&=P(0,\cdots,0)\exp\Big(\sum_{\substack{h_1,\cdots,h_m\in Z_+\\h_1>0}}\frac{1}{h_1}V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)\xi_1^{h_1}\cdots\xi_m^{h_m}\Big),\end{aligned}$$

$$|\xi_1|<1,\cdots,|\xi_m|<1;$$

令 $0<\xi_1,\cdots,\xi_m\uparrow1$，就得

$$\begin{aligned}1&=P(1,\cdots,1)\\&=P(0,\cdots,0)\exp\Big(\sum_{\substack{h_1,\cdots,h_m\in Z_+\\h_1>0}}\frac{1}{h_1}V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)\Big),\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{\substack{h_1,\cdots,h_m\in Z_+\\h_1>0}}\frac{1}{h_1}V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)<+\infty.$$

令

$$Q(h_1,\cdots,h_m)=\begin{cases}\frac{1}{h_1}V_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m), & h_1>0,\\0, & h_1=0,\end{cases}$$

则 Q 是 Z_+^m 上的测度。而且

$$P_{A_1,\cdots,A_m}(h_1,\cdots,h_m)=(e^{-Q(Z_+^m)}\sum_{j\in Z_+}\frac{1}{j!}Q^j)(h_1,\cdots,h_m),$$

从而 $P_{A_1,\cdots,A_m}$是无穷可分分布。因为

$$P_{A_2,\cdots,A_m}(\cdot,\cdots,\cdot)=\sum_{k\in Z_+}P_{A_1,A_2,\cdots,A_m}(k,\cdot,\cdots,\cdot),$$

从而 $P_{A_2,\cdots,A_m}$也是无穷可分分布。由于$A_2,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$是任意的，故由引理IV.6知 $P\in\mathscr{P}_{IN}$。

8） 由1)可以见到

$$V(A_1\times(\mu:\ \mu(A_i)=k_i,\ 1\leqslant i\leqslant m))$$

由 $P_{A_1,\cdots,A_m}$唯一确定，从而 $V_{A_1,\cdots,A_m}$被 $P_{A_1,\cdots,A_m}$唯一确定。应用单调类定理知V被P唯一确定。由于$P\in\mathscr{P}_{IN}$，由定理 9 知

$$V=\mathscr{C}_{\tilde{P}}.$$

11． 推论 设V是$(X\times N,\mathscr{A}(X\times N))$上的测度，对于任意$A\in\mathscr{B}$有

$$V(A\times(\mu:\ \mu(A)=0))=0,$$

则方程

$$\mathscr{C}_P=V*P$$

至多有一个解属于$\mathscr{P}_N$；如果P是这样的一个解，则$P\in\mathscr{P}_{IN}$。对于这个解：

1° P是正则无穷可分的，当且仅当

$$V(X\times(\mu:\ \mu(X)=\infty))=0;$$

2° P是奇异无穷可分的，当且仅当

$$V(X\times(\mu:\ \mu(X)<\infty))=0;$$

3° P是无后效的，当且仅当

$$V(X\times(\mu:\ \mu\text{不是形式}n\delta_a,a\in X))=0;$$

4° P是Poisson分布，当且仅当

$$V(X\times(\mu:\ \mu(X)\neq1))=0;$$

5° P是$G-P$分布，当且仅当

$$V(X\times(\mu:\ \mu(X)>2))=0.$$

这个推论容易由定理10推出。至于1°～5°则可由Ⅱ中相应定理推出。

12． 关于Poisson过程，定理10还可以有一个很简单的便于记忆的形式。

设$X\times N$到$X\times N$的映像如下：

$$T:\quad(a,\mu)\frown(a,\mu-(\mu(a)\wedge1)\delta_a),$$

这里$\mu(a)\wedge1=\min(\mu(a),1)$.显然$T$是$(X\times N,\mathscr{A}(X\times N))$到自身的可推映像。如果$V$是$\mathscr{A}(X\times N)$上的$\sigma$有限测度，这个测度在映像$T$之下所诱导的测度记为$V^T$。

13． 定理 设$\lambda\in M$,则N上的分布P是Poisson分布P_λ，当且仅当

$$\mathscr{C}_P^T=\lambda\times P,$$

证明 由定理10，P是Poissod分布P_λ当且仅当

$$\mathscr{C}_P=\mathscr{C}_{Q_\lambda}\otimes P,$$

但对于任意$A\in\mathscr{B}$，$Y\in\mathbf{N}$有

$$\mathscr{C}_{Q_\lambda}(A\times Y)=\int_Y \mu(A)Q_\lambda(d\mu)=\int \delta_{(a,\delta_a)}(A\times Y)\lambda(da),$$

于是由定理10及引理2知

$$\mathscr{C}_P(A\times Y)=\left(\int \delta_{(a,\delta_a)}(A\times\cdot)\lambda(da)*P\right)(Y)$$

$$=\int \delta_a(A)(\delta_{\delta_a}*P)(Y)\lambda(da),$$

然而

$$(\delta_{\delta_a}*P)(Y)=\int 1_Y(\nu+\mu)(\delta_{\delta_a}\times P)(d\nu\times d\mu)$$

$$=\int 1_Y(\delta_a+\mu)P(d\mu)=P(\mu:\ \mu+\delta_a\in Y),$$

于是在变换T之下，得

$$\mathscr{C}_P^T(A\times Y)=\int(\delta_a\times P)(A\times Y)\lambda(da)=\lambda(A)\times P(Y),$$

即$\mathscr{C}_P^T=\lambda\times P$.

§3. G_λ型分布

14. 定义 设$\lambda\in M$，$A\in\mathscr{B}$，$\lambda(A)>0$，令

$$\lambda(\cdot|A)=(\lambda(A))^{-1}\lambda(\cdot\cap A).$$

现设$E\in\mathscr{E}_+$，称E是G_λ型测度，如果对任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$_AE=\begin{cases}\sum\limits_{k\in z_+}E(\mu:\ \mu(A)=k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k, & \text{当}\lambda(A)>0,\\ E(N)\delta_0, & \text{当}\lambda(A)=0,\end{cases}$$

如果$P\in\mathscr{P}_N$，且P是G_λ型，则称P为G_λ型分布。因此，如果ξ是点过程，其分布$P\xi^{-1}$是G_λ型分布，则称ξ为G_λ型过程。

我们的主要目的在于弄清楚G_λ型过程的构造。本节首先研究G_λ型测度的一些简单性质。

首先注意，如果E是G_λ型测度，则对任意$A\in\mathscr{B}$，容易算出$_AE$的Laplace变换。对任意$f\in\mathscr{F}_{m+}$有

$$\Psi_{(_AE)}(f)=\int e^{-\mu f}(_AE)(\mu d)$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{k\in z_+}E_A(k)\left(\dfrac{1}{\lambda(A)}\right)^k\left(\int_A e^{-f(a)}\lambda(da)\right)^k, & \text{当}\lambda(A)>0,\\ E(N), & \text{当}\lambda(A)=0.\end{cases}$$

15. 引理 设$\lambda\in M$，则对任意$B\in\mathscr{B}$，$\lambda(B)>0$，以及$k,n\in Z_+$有

$$\left(Q_{\lambda(\cdot|B)}\right)_B^n(k)=\begin{cases}1, & \text{当}k=n,\\ 0, & \text{当}k\neq n.\end{cases}$$

证明 因为

$$\left(Q_{\lambda(\cdot|B)}\right)^n_B(k)=(Q_{\lambda(\cdot|B)})^n\,(\mu:\mu(B)=k)$$
$$=\begin{cases}(\lambda(B|B))^n, & 当k=n,\\ 0\quad, & 当k\neq n.\end{cases}$$

16. 引理 设$\lambda\epsilon M$，$A\epsilon\mathscr{B}$，$\lambda(A)>0$。如果E是G_λ型测度，则对任意$B\epsilon\mathscr{B}$，$B\subset A$有

$E_B=\mathscr{D}_{\lambda(B|A)}E_A$.

证明 记$c=\lambda(B|A)$。当$c>0$时，由定义得

$$_BE={}_B({}_AE)=\sum_{k\epsilon z_+}E_A(k)\,{}_B\left(\frac{1}{\lambda(A)}Q_{(A\lambda)}\right)^k$$

$$=\sum_{k\epsilon z_+}E_A(k)\left(\frac{1}{\lambda(A)}\right)^k({}_BQ_{(A\lambda)})^k$$

$$=\sum_{k\epsilon z_+}E_A(k)\left(\frac{1}{\lambda(A)}\right)^k(\lambda(A\backslash B)\delta_0+Q_{(B\lambda)})^k$$

$$=\sum_{k\epsilon z_+}E_A(k)((1-c)\,\delta_0+cQ_{\lambda(\cdot|B)})^k$$

$$=\sum_{n\epsilon z_+}(\mathscr{D}_CE_A)\,(n)\,(Q_{\lambda(\cdot|B)})^n,$$

由引理15得

$$E_B(k)=({}_BE)_B(k)=\sum_{n\epsilon z_+}(\mathscr{D}_CE_A)(n)\left(Q_{\lambda(\cdot|B)}\right)^n_B(k)$$

$$=(\mathscr{D}_CE_A)(k),$$

所以$E_B=\mathscr{D}_CE_A$。　　当$\lambda(B)=0$时，显然

$$E_B=({}_BE)_B=(E(N)\delta_0)_B=\mathscr{D}_CE_A.$$

17. 引理 设$\lambda\epsilon M$，E_1，E_2是G_λ型测度。如果对任意的$A\epsilon\mathscr{B}$都有$(E_1)_A=(E_2)_A$，则$E_1=E_2$。

证明 当$\lambda(A)>0$时，有

$$_A(E_1)=\sum_{k\epsilon z_+}(E_1)_A(k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k$$

$$=\sum_{k\epsilon z_+}(E_2)_A(k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k={}_A(E_2),$$

而当$\lambda(A)=0$时有

$$_A(E_1)=E_1(N)\,\delta_0=\sum_{k\epsilon z_+}(E_1)_A(k)\delta_0\,.$$

$$=\sum_{k\epsilon z_+}(E_2)_A\delta_0=E_2(N)\delta_0={}_A(E_2),$$

所以

$$_A(E_1)={}_A(E_2)\ ,\quad 凡A\epsilon\mathscr{B},$$

从而$E_1=E_2$。

18. 引理 如果E_1，E_2是G_λ型测度，则E_1*E_2也是G_λ型测度，并且对于任意的$A\in\mathscr{B}$有

$$_A(E_1*E_2)=$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{k\in Z_+}((E_1)_A*(E_2)_A)(k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k, & \text{当}\lambda(A)>0,\\ (E_1*E_2)(N)\delta_0, & \text{当}\lambda(A)=0.\end{cases}$$

证明 当$\lambda(A)>0$时有

$$_A(E_1*E_2)={}_A(E_1)*{}_A(E_2)$$
$$=\Big(\sum_{n\in Z_+}(E_1)_A(n)Q^n_{\lambda(\cdot|A)}\Big)*\Big(\sum_{m\in Z_+}(E_2)_A(m)Q^m_{\lambda(\cdot|A)}\Big)$$
$$=\sum_{k\in Z_+}((E_1)_A*(E_2)_A)(k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k$$
$$=\sum_{k\in Z_+}(E_1*E_2)_A(k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k;$$

而当$\lambda(A)=0$时有

$$_A(E_1*E_2)=({}_AE_1)*({}_AE_2)$$
$$=E_1(N)\delta_0*E_2(N)\delta_0=E_1(N)E_2(N)\delta_0$$
$$=(E_1*E_2)(N)\delta_0.$$

19. 引理 设(E_n)都是G_λ型测度，而且

$$\lim_{n\to\infty}\|E_n-E\|=0,$$

则E是G_λ型测度。

证明 当$\lambda(A)>0$，$A\in\mathscr{B}$时有

$$\limsup_{n\to\infty}\Big\|\sum_{k\in Z_+}(E_n)_A(k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k-\sum_{k\in Z_+}E_A(k)(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k\Big\|$$
$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sum_{k\in Z_+}|(E_n)_A(k)-E_A(k)|$$
$$=\limsup_{n\to\infty}\|(E_n)_A-E_A\|=0;$$

另一方面，又有

$$\limsup_{n\to\infty}\Big\|\sum_{k\in Z_+}(E_n)_A(k)\,(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k-{}_AE\Big\|$$
$$=\limsup_{n\to\infty}\|{}_A(E_n-E)\|=0,$$

故得

$$_AE=\sum_{k\in Z_+}E_A(k)(Q_{\lambda(\cdot|A)})^k;$$

当$\lambda(A)=0$时，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|{}_AE_n-{}_AE\|=0,$$

以及

$$\lim_{n\to\infty} E_n(N)=E(N),$$

从而

$$\|{}_AE-E(N)\delta_0\|=\lim_{n\to\infty}\|{}_AE_n-E(N)\delta_0\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\|E_n(N)\delta_0-E(N)\delta_0\|=0. \qquad \text{证毕.}$$

§4. 混合型 Poisson 过程

20. 定义 由Ⅱ.42知道，在距离空间$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$中，$\mathscr{P}_N$是闭集. 作为$(\mathscr{E}_+,\rho_{\mathscr{E}_+})$的子空间，$\mathscr{P}_N$中的Borel集类记为$\mathscr{A}(\mathscr{P}_N)$.

现设σ是$([0,\infty),\mathscr{B}[0,\infty))$上的一个分布，称$\sigma$是一个非负随机数分布.

又设$\lambda\in M$，若映象

$$l\frown P_{l\lambda}$$

是$([0,\infty),\mathscr{B}[0,\infty))$到$(\mathscr{P}_N,\mathscr{A}(\mathscr{P}_N))$的可测映象，其中$P_{l\lambda}$是强度测度为$l\lambda$的Poisson分布，则称

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$$

为混合型Poisson分布.

点过程ξ的分布$P\xi^{-1}$如果是混合型Poisson分布，则称ξ是混合型Poisson过程.

如果σ_1，σ_2是两个非负随机数分布，则对任意的$\lambda\in M$，由引理5得

$$\left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma_1(dl)\right)*\left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma_2(dl)\right)=\int(P_{l\lambda}*P_{s\lambda})(\cdot)(\sigma_1\times\sigma_2)(dl\times ds)$$

$$=\int P_{(s+l)\lambda}(\cdot)(\sigma_1\times\sigma_2)(dl\times ds)=\int P_{l\lambda}(\cdot)(\sigma_1*\sigma_2)(dl).$$

21. 引理 设$\lambda\in M$，σ是非负随机数分布，则

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$$

是G_λ型分布.

证明 如果$A\in\mathscr{B}$，$\lambda(A)=0$，则

$$({}_AP)(\cdot)=\int({}_AP_{l\lambda})(\cdot)\sigma(dl)=\delta_0=P(N)\delta_0;$$

如果$\lambda(A)>0$，则

$${}_A\left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)\right)=\int\sum_{k\in Z_+}\frac{1}{k!}e^{-l\lambda(A)}\,Q^k_{l(A\lambda)}(\cdot)\sigma(dl)$$

$$=\sum_{k\in Z_+}\left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)\right)_A(k)\,(Q_{(\lambda\cdot|A)})^k.$$

由此引理立刻知道，强度测度为λ的Poisson分布P_λ是G_λ型分布.

下面举一个例子，说明简单分布不一定是有序的.

22. 例 设L是数直线R上的勒贝格测度，令

$$P(\cdot)=\int_1^\infty P_{lL}(\cdot)cl^{-(c+1)}L(dl),\qquad 0<c<1,$$

因为

$$\int_1^\infty cl^{-(c+1)}L(dl)=1,$$

所以P是混合型Poisson分布。设A是[0,1]中的Borel集，$L(A)>0$，则

$$\begin{aligned}&P(\mu:\mu(A)>1)\\&=\int_1^\infty \frac{1-e^{-lL(A)}(1+lL(A))}{l^{(c+1)}}cL(dl)\\&=(L(A))^c\int_{L(A)}^\infty \frac{1-e^{-y}(1+y)}{y^{(c+1)}}cL(dy)\\&\geqslant (L(A))\int_{L(A)}^\infty \frac{1-e^{-y}(1+y)}{y^{(c+1)}}cL(dy),\end{aligned}$$

因此对于[0,1]的任意分割$(\mathscr{D})$总有

$$\begin{aligned}&\sum_{A\in\mathscr{D}}P(\mu:\mu(A)>1)\\&\geqslant\Big(\sum_{A\in\mathscr{D}}L(A)\Big)\int_1^\infty \frac{1-e^{-y}(1+y)}{y^{(c+1)}}cL(dy)\\&=\int_1^\infty \frac{1-e^{-y}(1+y)}{y^{(c+1)}}cL(dy)>0,\end{aligned}$$

由有序性的定义，知道P不是有序的；但因为L是扩散的，故由定理Ⅱ.40知P是简单的。

§5. G_λ 型分布的刻划

23. 在§2中我们定义了G_λ型过程，在§3中又定义了混合型Poisson过程，这两类过程有着本质的联系。在这一节中我们就要研究这个问题。

首先证明几个引理。

24. 引理 对任意的$0\leqslant c\leqslant 1$，以Π_c记Z_+上的Poisson分布，即

$$\Pi_c(Z_+)=1,$$

$$\Pi_c(k)=\frac{1}{k!}e^{-c}c^k,\quad k\in Z_+;$$

则有

$$\left\|\mathscr{D}_c\delta_n-\Pi_{nc}\right\|\leqslant 2nc^2.$$

证明 因为

$$\mathscr{D}_c\delta_n=((1-c)\delta_0+c\delta_1)^n,$$

$$\Pi_{nc}=(\Pi_c)^n=(\mathscr{U}_{c\delta_1})^n,$$

又因为

$$\mathscr{U}_{(1-c)\delta_0}=\delta_0,$$

所以

$$\Pi_{nc}=(\mathscr{U}_{(1-c)\delta_0+c\delta_1})^n,$$

应用引理Ⅱ.15及推论Ⅱ.17，得

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{D}_c\delta_n-\Pi_{nc}\right\|&=\left\|((1-c)\delta_0+c\delta_1)^n-(\mathscr{U}_{c\delta_1})^n\right\|\\&=\left\|((1-c)\delta_0+c\delta_1)^n-(\mathscr{U}_{(1-c)\delta_0+c\delta_1})^n\right\|\\&\leqslant n\left\|(1-c)\delta_0+c\delta_1-\mathscr{U}_{(1-c)\delta_0+c\delta_1}\right\|\\&\leqslant 2n(1-(1-c))^2=2nc^2.\end{aligned}$$

25. 引理 设$0\leqslant c\leqslant 1$，$n,h\in Z_+$，则

$$\mathscr{D}_c\delta_{n+1}(h+1,h+2,\cdots)\geqslant\mathscr{D}_c\delta_n(h+1,h+2,\cdots).$$

证明 当$n=0$时，有

$$\mathscr{D}_c\delta_1(h+1,h+2,\cdots)\geqslant\mathscr{D}_c\delta_0(h+1,h+2,\cdots)=0;$$

当$n>0$时，有

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_c\delta_{n+1}(h+1,h+2,\cdots)&=[(1-c)\mathscr{D}_c\delta_n+c\delta_1*\mathscr{D}_c\delta_n](h+1,h+2,\cdots)\\&\geqslant(1-c)\mathscr{D}_c\delta_n(h+1,h+2,\cdots)+c\mathscr{D}_c\delta_n(h+1,h+2,\cdots)\\&=\mathscr{D}_c\delta_n(h+1,h+2,\cdots).\end{aligned}$$

下面的定理是本节的主要结果之一，它回答了本节开头所提出的问题。

26. 定理 设$\lambda\in M$，$\lambda(X)=\infty$，则$(N,\mathbf{N})$上的分布P是G_λ型分布的充分必要条件为：存在非负随机数分布σ使

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl),$$

换言之，P是混合型Poisson分布。

证明 充分性已于引理21证明。现假设P是G_λ型分布，$\lambda(X)=\infty$，欲证P是混合型Poisson分布。证明分为如下几步：

1° 设$A_n\in\mathscr{B}$，$\lambda(A_n)>0$，$A_n\uparrow X$，令

$$\sigma_n=\sum_{k\in Z_+}P_{A_n}(k)\delta_{k(\lambda(A_n))^{-1}},$$

我们断言：对任给的$\varepsilon>0$，必存在$c>0$使对n一致地成立：

$$\sigma_n([c,\infty))<\varepsilon.$$

若不然，则因为

$$\sigma_n([c,\infty))=\sum_{k\geqslant c\lambda(A_n)}P_{A_n}(k)=P(\mu:\mu(A_n)\geqslant c\lambda(A_n)),$$

故存在$\varepsilon_0>0$以及序列$\{n_s\}$使

$$P(\mu:\mu(A_{n_s})\geqslant s\lambda(A_{n_s}))\geqslant\varepsilon_0$$

对一切$s\in Z_+$成立，由于$\lambda(X)=\infty$，我们还可取得$\lambda(A_n)\geqslant n^2$，从而有$\lambda(A_{n_s})\geqslant(n_s)^2\geqslant s^2$。

现设任意$A\in\mathscr{B}$，$\lambda(A)>0$，则当$s,h\in Z_+$时有

$$P(\mu:\mu(A)>h)$$

$$= \sum_{k \in Z_+} P_{A_{n_s}}(k)(Q_{\lambda(\cdot|A_{n_s})})^k(\mu: \mu(A) > h)$$

$$\geqslant \sum_{k > s\lambda(A_{n_s})} P_{A_{n_s}}(k)(Q_{\lambda(\cdot|A_{n_s})})^{b_s}(\mu: \mu(A) > h),$$

其中$b_s = [s\lambda(A_{n_s})]$是$s\lambda(A_{n_s})$的整数部分。于是

$$P(\mu: \mu(A) > h) \geqslant P(\mu: \mu(A_{n_s}) \geqslant s\lambda(A_{n_s}))\mathscr{D}_c\delta_{b_s}(h+1, h+2, \cdots),$$

其中 $c = \dfrac{\lambda(A)}{\lambda(A_{n_s})}$，上面用到了

$$(Q_{\lambda(\cdot|A_{n_s})})^{b_s}(\mu: \mu(A) > h) = \mathscr{D}_c\delta_{b_s}(h+1, h+2, \cdots).$$

应用引理24，上面的不等式变为：

$$P(\mu: \mu(A) > h) \geqslant \varepsilon_0(\Pi_{b_s c}(h+1, h+2, \cdots) - 2b_s c^2),$$

因为

$$b_s c^2 = \left(\frac{\lambda(A)}{\lambda(A_{n_s})}\right)^2 b_s \leqslant \frac{1}{s}(\lambda(A))^2,$$

故当$s \to \infty$时$b_s c^2 \to 0$；又因为当$s \to \infty$时，$b_s c \to \infty$，所以

$$P(\mu: \mu(A) > h) \geqslant \varepsilon_0 \lim_{s \to \infty}(\Pi_{b_s c}(h+1, h+2, \cdots) - 2b_s c^2)$$

$$= \varepsilon_0 \lim_{s \to \infty} \sum_{k > h} e^{-b_s c}\frac{(b_s c)^k}{k!}$$

$$= \varepsilon_0 \lim_{s \to \infty}(1 - e^{-b_s c}\sum_{k \leqslant h}\frac{(b_s c)^k}{k!}) = \varepsilon_0,$$

从而得到

$$P(\mu: \mu(A) = \infty) \geqslant \varepsilon_0,$$

这与$A \in \mathscr{B}$矛盾。

上面我们证明了$\{\sigma_n\}$满足条件：任给$\varepsilon > 0$，必存在$c > 0$使$\sigma_n([c, \infty)) < \varepsilon$ 对一切n成立。这说明$[0, \infty)$上的分布族$\{\sigma_n\}$是弱相对紧的。

2° 由1°知，存在$\{\sigma_n\}$的子序列$\{\sigma_{n_k}\}$弱收敛于$[0, \infty)$上的某个分布σ。固定$A \in \mathscr{B}$，$h \in Z_+$，则$l \frown \Pi_{l\lambda(A)}(h)$是$[0, \infty)$上的有界连续函数，故由$\sigma_{n_k} \xrightarrow{w} \sigma$可得：

$$\lim_{k \to \infty}\int \Pi_{l\lambda(A)}(h)\sigma_{n_k}(dl) = \int \Pi_{l\lambda(A)}(h)\sigma(dl),$$

由定理Ⅳ.7我们得：

$$\lim_{k \to \infty}\left\|\int \Pi_{l\lambda(A)}(\cdot)\sigma_{n_k}(dl) - \int \Pi_{l\lambda(A)}(\cdot)\sigma(dl)\right\| = 0.$$

3° 现在再次应用引理24，对任意n，$s > 0$，令 $c = \dfrac{\lambda(A)}{\lambda(A_n)}$，则

$$\left\|P_A - \int \Pi_{l\lambda(A)}(\cdot)\sigma_n(dl)\right\| = \left\|P_A - \sum_{k \in Z_+} P_{A_n}(k)\Pi_{kc}\right\|$$

$$= \left\| \sum_{k \in Z_+} P(\mu:\ \mu(A_n)=k)((\mathscr{D}_c\delta_1)^k - \Pi_{kc}) \right\|$$

$$\leqslant \sum_{0<k<s\lambda(A_n)} P_{A_n}(k) 2\cdot kc^2 + 2P(\mu:\ \mu(A_n) \geqslant s\lambda(A_n))$$

$$\leqslant 2s\lambda(A_n)c^2 + 2P(\mu:\ \mu(A_n) \geqslant s\lambda(A_n))$$

$$= 2s(\lambda(A_n))^{-1}(\lambda(A))^2 + 2P(\mu:\ \mu(A_n) \geqslant s\lambda(A_n)),$$

固定s，令$n \to \infty$得：

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| P_A - \int \Pi_{l\lambda(A)}(\cdot)\sigma_n(dl) \right\|$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} 2P(\mu:\ \mu(A_n) \geqslant s\lambda(A_n)),$$

再令$s \to \infty$，根据1°的证明得

$$\limsup_{n\to\infty}\ 2P(\mu:\ \mu(A_n) \geqslant s\lambda(A_n)) = 0,$$

从而得

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P_A - \int \Pi_{l\lambda(A)}(\cdot)\sigma_n(dl) \right\| = 0;$$

再根据2°得

$$P_A = \int \Pi_{l\lambda(A)}(\cdot)\sigma(dl) = \left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)\right)_A,$$

所以由引理17及引理21得

$$P = \int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl).$$

定理26指出，当$\lambda \in M$，$\lambda(X)=\infty$时，G_λ型分布与如下形式的混合型Poisson分布重合：

$$P(\cdot) = \int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl).$$

自然会产生这样的问题：当$\lambda(X)<\infty$时会是怎样的情形？由于$\lambda(X)<\infty$表明λ是$(X,\mathscr{A})$上的有限测度，这时我们考虑λ为$(X,\mathscr{A})$上的分布即已足够。

下述引理指出：当λ是$(X,\mathscr{A})$上的分布时，如果P是G_λ型分布，则P是有限点过程。

27. 引理 设λ是$(X,\mathscr{A})$上的分布，如果P是G_λ型分布，则

$$P(\mu:\ \mu(X)<\infty)=1.$$

证明 取$A_1 \in \mathscr{B}$，使

$$\lambda(A_1)>0, \quad \frac{\lambda(X \setminus A_1)}{\lambda(A_1)} \leqslant 1,$$

因为λ是$\mathscr{A}$上的分布，这样的A_1是可以取到的。又取$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \uparrow X$，$A_n \in \mathscr{B}$，应用引理16，当$n>m$时有

$$P_{A_n \setminus A_m} = \mathscr{D}_{(\lambda(A_n))^{-1}\lambda(A_n \setminus A_m)} P_{A_n}$$

$$= \mathscr{D}_{(\lambda(A_n))^{-1}\lambda(A_n \setminus A_m)} (\mathscr{D}_{(\lambda(A_n))^{-1}\lambda(A_1)})^{-1} P_{A_1},$$

注意到$\mathscr{D}_{c_1c_2} = \mathscr{D}_{c_1}\mathscr{D}_{c_2}$，得

$$P_{A_n \setminus A_m} = \mathscr{D}_{(\lambda(A_1))^{-1}\lambda(A_n \setminus A_m)} P_{A_1},$$

又因为

$$P_{A_n \setminus A_m}(\{0\}) = [\mathscr{D}_{(\lambda(A_1))^{-1}\lambda(A_n \setminus A_m)} P_{A_1}](\{0\})$$

$$= \sum_{k \in Z_+} P_{A_1}(k)(1-(\lambda(A_1))^{-1}\lambda(A_n \setminus A_m))^k$$

$$\geqslant \sum_{k \in Z_+} P_{A_1}(k)(1-(\lambda(A_1))^{-1}\lambda(X \setminus A_m))^k,$$

从而

$$P_{X \setminus A_m}(\{0\}) \geqslant \sum_{k \in Z_+} P_{A_1}(k)(1-(\lambda(A_1))^{-1}\lambda(X \setminus A_m))^k,$$

即

$$\lim_{m \to \infty} P(\mu:\ \mu(X \setminus A_m) > 0)$$

$$\leqslant 1 - \lim_{m \to \infty} \sum_{k \in Z_+} P_{A_1}(k)(1-(\lambda(A_1))^{-1}\lambda(X \setminus A_m))^k$$

$$\leqslant 1 - \sum_{k \in Z_+} P_{A_1}(k) = 0,$$

因此$P(\mu:\ \mu(X) < \infty) = 1$.

28. 定理 设λ是$(X, \mathscr{A})$上的分布，则P是G_λ型分布当且仅当

$$P = \sum_{k \in Z_+} P_X(k) Q_\lambda^k.$$

证明 1° 首先设(X, ρ_X)是有界距离空间．这时因为λ是分布，故$\lambda(\cdot) = \lambda(\cdot | X)$，又因为$X \in \mathscr{B}$，所以当$P$是$G_\lambda$型分布时，必有

$$P = \sum_{k \in Z_+} P_X(k) Q^k_{\lambda(\cdot | X)} = \sum_{k \in Z_+} P_X(k) Q_\lambda^k.$$

反之，如果P有定理中所述的表达式．若$A \in \mathscr{B}$，$\lambda(A) > 0$，则有

$$_A P = \sum_{k \in Z_+} P_X(k)(_A Q_\lambda)^k$$

$$= \sum_{k \in Z_+} P_X(k)(1-\lambda(A))\delta_0 + Q_{(A\lambda)})^k$$

$$= \sum_{k \in Z_+} P_X(k)((1-\lambda(A))\delta_0 + \lambda(A) Q_{\lambda(\cdot | A)})^k$$

$$= \sum_{n \in Z_+} \mathscr{D}_{\lambda(A)} P_X(n)\, Q^n_{\lambda(\cdot | A)}$$

$$= \sum_{n \in Z_+} P_A(n)\, Q^n_{\lambda(\cdot | A)},$$

最后一步，用到了引理15．所以P是G_λ型分布．

2° 现在取消(X,ρ_X)是有界距离空间的假定。根据Ⅱ.§3，我们总可以找到一个有界距离空间与(X,ρ_X)同构。例如可取$(0,1)$的可测子集X_1,ρ_{X_1}按通常数直线上的距离((X_1,ρ_{X_1})当然有界)，并使$(X_1,\rho_{X_1})\sim(X,\rho_X)$.记同构映象为

$$\varphi(x)=x_1,\quad x\in X,\ x_1\in X_1.$$

以N_B记$(X,\mathscr{A})$上的全有限计数测度，即：

$$N_B=\{\mu:\ \mu\in N,\mu(X)<\infty\}.$$

对任意$A\in\mathscr{A}(X_1)$，令

$$\mu_\varphi(A)=\mu(\varphi^{-1}(A)),$$

则$\mu\frown\mu_\varphi$是$(N_B,N_B\cap\mathbf{N})$至$(N(X_1),\mathbf{N}(X_1))$上的一一映象。又记$\lambda_\varphi(\cdot)=\lambda(\varphi^{-1}(\cdot))$，则$\lambda_\varphi$是$(X_1,\mathscr{A}(X_1))$上的分布。

现在我们注意，当λ是分布时，G_λ型分布与相空间为(X_1,ρ_{X_1})上的G_{λ_φ}型分布一一对应(用到引理27)。但(X_1,ρ_{X_1})是有界距离空间，G_{λ_φ}型分布(记作$P(\lambda_\varphi)$)有唯一表达式

$$P(\lambda_\varphi)=\sum_{k\in z_+}P_X(\lambda_\varphi,k)\ (Q_{\lambda_\varphi})^k.$$

此处$P_X(\lambda_\varphi,k)=[P(\lambda_\varphi)](k)$.但$\lambda$与$\lambda_\varphi$一一对应，因此$G_\lambda$型分布$P$可唯一表成

$$P=\sum_{k\in z_+}P_X(k)Q_\lambda^k.$$

29. 注记 上述定理可以用另法证明。简述如下。充分性与上述证明中的1°相同。往证必要性，即假定λ是分布，P是G_λ型分布，要证

$$P=\sum_{k\in z_+}P_X(k)(Q_\lambda)^k.$$

证明 选取集序列$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$，

$$\|P-{}_{A_n}P\|=\|P(\mu\in(\cdot))-P(A_n\mu\in(\cdot))\|$$
$$=\|P(\mu\in(\cdot),\mu(X\setminus A_n)>0)-P(A_n\mu\in(\cdot),\mu(X\setminus A_n)>0)\|$$
$$\leqslant 2P(\mu:\ \mu(X\setminus A_n)>0),$$

由引理27的证明推知

$$\lim_{n\to\infty}\|P-{}_{A_n}P\|=0,$$

由于P是G_λ型分布，故对任意的$k_0\in Z_+$，有

$$\|P-\sum_{k\in z_+}P_X(k)Q_\lambda^k\|$$
$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\|P-{}_{A_n}P\|+\limsup_{n\to\infty}\|{}_{A_n}P-\sum_{k\in z_+}P_X(k)Q_\lambda^k\|$$
$$=\limsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{k\in z_+}P_{A_n}(k)Q^k_{\lambda(\cdot|A_n)}-\sum_{k\in z_+}P_X(k)Q_\lambda^k\right\|$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \left\| \sum_{k<k_0} P_{A_n}(k) Q^k_{\lambda(\cdot|A_n)} - \sum_{k<k_0} P_X(k) Q^k_\lambda \right\|$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} \sum_{k>k_0} (P_{A_n}(k) + P_X(k))$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \sum_{k<k_0} P_X(k) \left\| Q^k_{\lambda(\cdot|A_n)} - Q^k_\lambda \right\| + \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in Z_+} |P_{A_n}(k) - P_X(k)|$$

$$+ \limsup_{n\to\infty} (P(\mu:\ \mu(A_n) > k_0) + P(\mu:\ \mu(X) > k_0))$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \sum_{k<k_0} k\, P_X(k) \| Q_{\lambda(\cdot|A_n)} - Q_\lambda \| + 0 + 2P(\mu:\ \mu(X) > k_0),$$

这里最末一步用到了定理Ⅱ.15.

现在注意λ是分布，则

$$\|Q_{\lambda(\cdot|A_n)} - Q_\lambda\| = \|(\lambda(A_n))^{-1}\lambda(\cdot \cap A_n) - \lambda\|$$

$$= \frac{1}{\lambda(A_n)} \|\lambda(\cdot \cap A_n) - \lambda(A_n)\lambda\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda(A_n)} (\|\lambda(\cdot \cap A_n) - \lambda\| + (1 - \lambda(A_n))\|\lambda\|)$$

$$= \frac{1}{\lambda(A_n)} \lambda(X \setminus A_n) + 1 - \lambda(A_n),$$

所以当$n\to\infty$时$\|Q_{\lambda(\cdot|A_n)} - Q_\lambda\| \to 0$.从而对任意固定的$k_0$有

$$\left\| P - \sum_{k\in Z_+} P_X(k) Q^k_\lambda \right\| \leqslant 2P(\mu:\ \mu(X) > k_0),$$

令$k_0\to\infty$,再应用引理27得

$$P = \sum_{k\in Z_+} P_X(k) Q^k_\lambda.$$

应用Laplace变换的方法，定理26及定理28可以写成下面的形式.

30. 定理 设$\lambda\in M$, $P\in\mathscr{P}_N$,则

1° 如果$\lambda(X)=\infty$,则P是G_λ型分布当且仅当P的Laplace变换有下述形式：对任意$f\in\mathscr{F}_{m+}$,

$$\Psi_P(f) = \int \exp\left(-\int (1 - e^{-f(a)}) l\lambda(da)\right) \sigma(dl),$$

其中σ是$[0,\infty)$上的分布；

2° 当$\lambda(X)=1$时，P是G_λ型分布的充分必要条件为，P的Laplace变换有下述形式：对任意的$f\in\mathscr{F}_{m+}$,

$$\Psi_P(f) = \sum_{k\in Z_+} P_X(k) \left(\int e^{-f(a)} \lambda(da)\right)^k.$$

证明 在情形1°，只须考虑混合型Poisson分布的Laplace变换；在情形2°只须考虑$P=\sum_{k\in Z_+} P_X(k)\cdot Q^k_\lambda$的Laplace变换，应用定理Ⅱ. 38就得本定理.

§6. Cox 过程

31. 定义 以G_+及$\mathscr{P}_M$分别记$(M,\mathbf{M})$上的全体有限测度及全体概率分布。仍以P_λ记强度测度为λ的Poisson分布。设$G\in\mathscr{P}_M$，记

$$P(\cdot)=\int_M P_\lambda(\cdot)G(d\lambda),$$

显然$P\in\mathscr{P}_N$，称之为Cox分布；如果$G\in G_+$，则下述积分

$$\int P_\lambda(\cdot)G(d\lambda)$$

是$(N,\mathbf{N})$上的测度，且属于$\mathscr{E}_+$。这个积分依赖于$G\in G_+$，记为

$$\phi(G)=\int P_\lambda(\cdot)G(d\lambda),$$

也给$\phi(G)$一个名称，称为Cox测度。

对于点过程ξ，如果它的分布$P\xi^{-1}$是Cox分布，则称ξ是Cox过程。

容易求出$\phi(G)$的Laplace变换。设$f\in\mathscr{F}_{m+}$，则

$$\Psi_{\phi(G)}(f)=\int\Big(\int e^{-\mu f}(d\mu)\Big)G(d\lambda)$$

$$=\int\Big(\exp\{-\int(1-e^{-f(a)})\lambda(da)\}\Big)G(d\lambda)=\Psi_G(1-e^{-f}).$$

由定理Ⅰ.44已知$\mathscr{D}_cP_\lambda=P_{c\lambda}$，其中$c\in[0,1]$。现在证明

32. 引理 设$G\in G_+$，$c\in[0,1]$，则

$$\mathscr{D}_c(\phi(G))=\int_M P_{c\lambda}(\cdot)G(d\lambda).$$

证明 设$A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$且互不相交，记

$$f=\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i},\quad 0<h_i\leqslant 1,$$

并记

$$\phi_c(G)=\int P_{c\lambda}(\cdot)G(d\lambda),\qquad 0\leqslant c\leqslant 1,$$

显然当$c=1$时，$\phi_c(G)=\phi(G)$。又

$$\Psi_{\phi_c(G)}(f)=\int\exp\Big(-c\sum_{i=1}^m(1-h_i)\lambda(A_i)\Big)G(d\lambda),$$

但由定理Ⅰ.69，

$$\Psi_{\mathscr{D}_c\phi(G)}(f)=\Psi_{\mathscr{D}_c\phi(G)}\Big(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{h_i}\Big)$$

$$=\Psi_{\phi(G)}\Big(\sum_{i=1}^m 1_{A_i}\log\frac{1}{(1-c)+ch_i}\Big)$$

$$=\int \Psi_{\Gamma_\lambda}\left(\sum_{i=1}^{m} 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c)+ch_i}\right) G(d\lambda)$$

$$=\int \exp\left(-\sum_{i=1}^{m}(1-h_i)\lambda(A_i)\right) G(d\lambda),$$

从而得

$$\mathscr{D}_c(\Phi(G))_{A_1,\cdots,A_m}=\left(\int P_{c\lambda}(\cdot)\, G(d\lambda)\right)_{A_1,\cdots,A_m},$$

所以

$$\mathscr{D}_c(\Phi(G))=\int P_{c\lambda}(\cdot)G(d\lambda)=\phi_c(G).$$

由上述引理还得，当 $c\in(0,\ 1]$ 时，有

$$\mathscr{D}_c\,\phi_{c^{-1}\lambda}(G)=\Phi(G).$$

33. 定理 由 $\mathscr{P}_M$ 到 $\mathscr{P}_N$ 内的映象 $G\frown\Phi(G)$ 是一一的。

证明 设 $\lambda\in M$，$A\in\mathscr{B}$，$c\in(0,\ 1]$，$\varepsilon>0$。对于 Poisson 分布 $P_{c^{-1}\lambda}$ 而言，它的一阶矩测度是 $C^{-1}\lambda(A)$，二阶矩是 $C^{-1}\lambda(A)(1+C^{-1}\lambda(A))$，从而由车贝晓夫不等式可知

$$P_{c^{-1}\lambda}(|c\mu(A)-\lambda(A)|>\varepsilon)=P_{c^{-1}\lambda}(|\mu(A)-c^{-1}\lambda(A)|>c^{-1}\varepsilon)$$

$$\leqslant\frac{c^{-1}\lambda(A)}{(c^{-1}\varepsilon)^2}=c\lambda(A)\varepsilon^{-2},$$

现令 $c_n\downarrow 0$，考虑随机变量序列 $\xi_n=c_n\mu(A)$，由上式得

$$P_{c_n^{-1}\lambda}(|\xi_n-\lambda(A)|>\varepsilon)\leqslant c_n\lambda(A)\varepsilon^{-2},$$

所以得到

$$P_{c_n^{-1}\lambda}\ \xi_n^{-1}\stackrel{d}{\Longrightarrow}\delta_{\lambda(A)};$$

现设 $A_1,\cdots,A_m\in\mathscr{B}$ 且互不相交，考虑 m 维随机矢量 $\eta_n=(c_n\mu(A_1),\cdots,c_n\mu(A_m))$，由上述同理可得：

$$P_{c_n^{-1}\lambda}\ \eta_n^{-1}\stackrel{d}{\Longrightarrow}\delta_{(\lambda(A_1),\cdots,\lambda(A_m))},$$

现设 $h(x)$ 是 $R_+^m=[0,\ \infty)^m$ 上的有界连续函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int h(x)(P_{c_n^{-1}\lambda}\eta_n^{-1})(dx)=h(\lambda(A_1),\cdots,\lambda(A_m)),$$

现设 $G\in\mathscr{P}_M$，按控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int\left(\int h(x)(P_{c_n^{-1}\lambda}\eta_n^{-1})(dx)\right)G(d\lambda)=\int h(x)G_{A_1,\cdots,A_m}(dx),$$

由引理32又得

$$\int P_{c_n^{-1}\lambda}\eta_n^{-1}(\cdot)G(d\lambda)=\mathscr{D}_{c_n}^{-1}\int P_\lambda\eta_n^{-1}(\cdot)\,G(d\lambda),$$

从而得

$$\lim_{n\to\infty}\int h(x)(\mathscr{D}_{c_n}^{-1}\int P_\lambda\eta_n^{-1}\ G(d\lambda))(dx)=\int h(x)G_{A_1,\cdots,A_m}(dx);$$

现在如果有 G_1，$G_2\in\mathscr{P}_M$，使

$$\Phi(G_1)=\int P_\lambda(\cdot)G_1(d\lambda)=\int P_\lambda(\cdot)G_2(d\lambda)=\Phi(G_2),$$

则自然有

$$\mathscr{D}_{c_n}^{-1}\int P_\lambda\eta_n^{-1}G_1(d\lambda)=\mathscr{D}_{c_n}^{-1}\int P_\lambda\eta_n^{-1}G_2(d\lambda),$$

故由上面所证可知，对任意的 R_+^m 上的有界连续函数 h 有

$$\int h(d)(G_1)_{A_1,\cdots,A_m}(dx)=\int h(x)(G_2)_{A_1,\cdots,A_m}(dx),$$

于是

$$(G_1)_{A_1,\cdots,A_m}=(G_2)_{A_1,\cdots,A_m},$$

由推论Ⅰ.5得知 $G_1=G_2$。证毕。

34．推论 如果 $\lambda\in M$，$\lambda\neq0$，σ_1，σ_2 是两个非负随机数分布并且

$$\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma_1(dl)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma_2(dl),$$

则 $\sigma_1=\sigma_2$。

证明 由 $[0,\infty)$ 到 $(M,\mathbf{M})$ 的映象

$$\varphi:\ l\frown l\lambda$$

显然是可测的。现设

$$G_1=\sigma_1\varphi^{-1},\ G_2=\sigma_2\varphi^{-1}$$

则 G_1，$G_2\in\mathscr{P}_M$。由条件知

$$\int P_\lambda(\cdot)G_1(d\lambda)=\int P_\lambda(\cdot)\sigma_1\varphi^{-1}(d\lambda)$$

$$=\int P_\lambda(\cdot)\sigma_2\varphi^{-1}(d\lambda)=\int P_\lambda(\cdot)G_2(d\lambda),$$

从而由定理33，$G_1=G_2$，即 $\sigma_1=\sigma_2$。

下述定理表明，Cox 分布与 G_λ 型分布的交集正好是混合型 Poisson 分布。

35．定理 设 $\lambda\in M$，P 是 Cox 分布。则 P 是 G_λ 型分布的充分必要条件是 P 是混合型 Poissonc 分布。

证明 如果 $P=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$，则由引理21知 P 是 G_λ 型分布，再由推论34的证明可见 P 是 Cox 分布。

反之，如果 P 是 Cox 分布同时又是 G_λ 型分布。若 $\lambda=0$ 则 $P=\delta_0$；如果 $\lambda\neq0$，选取 $A\in\mathscr{B}$，使 $\lambda(A)>0$，由于 P 是 G_λ 型分布，故

$$_AP=\sum_{k\in Z_+}P_A(k)\,Q^k_{\lambda(\cdot|A)},$$

然而 P 又是 Cox 分布，从而存在 $G\in\mathscr{P}_M$ 使

$$P_A(k)=\int P_\lambda(\mu:\ \mu(A)=k)G(d\lambda)$$

$$=\int (P_\lambda)_A(k)\,G(d\lambda)=\int e^{-\lambda(A)}\frac{1}{k!}(\lambda(A))^kG(d\lambda)$$

$$=\int e^{-l}\frac{1}{k!}l^kG_A(dl),$$

从而得到

$$_AP=\sum_{k\in Z_+}\left(\int e^{-l}\frac{1}{k!}l^kG_A(dl)\right)Q^k_{\lambda(\cdot|A)}$$

$$=\int\left(\sum_{k\in Z_+}e^{-l}\frac{1}{k!}l^kQ^k_{\lambda(\cdot|A)}\right)G_A(dl)=\int\left(e^{-l}\sum_{k\in Z_+}\frac{1}{k!}Q^k_{l\lambda(\cdot|A)}\right)G_A(dl)$$

$$=\int P_{l\lambda(\cdot|A)}(\cdot)G_A(dl)={}_A\left(\int P_{l'\lambda}(\cdot)\,G^*_A(dl')\right),$$

其中 $l'=(\lambda(A)^{-1}l$，$G^*_A(dl')=G_A(\lambda(A)dl)$，$G^*_A$ 是 $[0,\ \infty)$ 上的分布，所以由

$$_AP={}_A\left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\,G^*_A(dl)\right).$$

可得到

$$P=\int P_{l\lambda}(\cdot)\,G^*_A(dl),$$

即 P 确是混合型 Poisson 分布。

§7. 无穷可分混合型 Poisson 过程

36. 引理 设 $\lambda\in M$，$A\in\mathscr{B}$，$E\in\mathscr{E}_+$ 是 G_λ 型测度。如果存在 $n\in Z_+$，$E_1\in\mathscr{E}_+$，使 $E_1^n=E$，则 E_1 也是 G_λ 型测度。

证明 因为 E 是 G_λ 型测度，故对任意的 $A\in\mathscr{B}$，当 $\lambda(A)>0$ 时有

$$_AE=\sum_{k\in Z_+}E_A(k)\,Q^k_{\lambda(\cdot|A)},$$

又因为 $E_1^n=E$，所以 $((E_1)_A)^n=E_A$。显然

$$\left(\sum_{k\in Z_+}(E_1)_A(k)\,Q^k_{\lambda(\cdot|A)}\right)^n$$

$$=\sum_{k\in Z_+}E_A(k)\,Q^k_{\lambda(\cdot|A)}={}_AE,$$

由卷积根的唯一性定理，得

$${}_AE_1 = \sum_{k\in Z_+} (E_1)_A(k)\, Q^k_{\lambda(\cdot|A)},$$

其次，当$\lambda(A)=0$时，${}_AE=E(N)\delta_0$，从而

$${}_AE_1 = \sqrt[n]{E(N)}\delta_0 = E_1(N)\delta_0,$$

所以E_1是G_λ型测度。

37. 定理 设P是混合型 Poisson 分布且$\lambda\in M$，$\lambda(X)=\infty$使

$$P = \int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl),$$

则$P\in\mathscr{P}_{IN}$当且仅当σ是$[0,\infty)$上的无穷可分分布。

证明 *充分性* 如果σ是$[0,\infty)$上的无穷可分分布，则对任意的$n\in Z_+$，存在非负随机数分布γ，使$\gamma^n=\sigma$。这时由引理5得

$$\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl) = \left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\gamma(dl)\right)^n,$$

从而P是无穷可分的，即$P\in\mathscr{P}_{IN}$。

必要性 设$P\in\mathscr{P}_{IN}$并且$P=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$，欲证$\sigma$是无穷可分的。这时由引理21知$P$是$G_\lambda$型分布；由引理36知，对任意$n\in Z_+$，$\sqrt[n]{P}$亦是$G_\lambda$型分布。由于$\lambda(X)=\infty$，由定理26知道$\sqrt[n]{P}$仍是混合型Poisson分布。从而存在非负随机数分布γ，使

$$\sqrt[n]{P} = \int P_{l\lambda}(\cdot)\gamma(dl),$$

因此

$$P = \left(\int P_{l\lambda}(\cdot)\gamma(dl)\right)^n,$$

由引理5，

$$P = \int P_{l\lambda}(\cdot)\gamma^n(dl),$$

于是由推论34知$\sigma=\gamma^n$，故σ确为无穷可分分布。定理证毕。

当$\lambda(X)<\infty$时，定理37是否成立尚不知道。因为这时定理26对$\lambda(X)<\infty$的情形不一定成立。

§8. 混合型Poisson分布的Campbell测度

38. 引理 设$\lambda\in M$，$\lambda(X)=\infty$，$P=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$。则存在$(N,\mathbf{N})$上的非负可测函数$\eta(\cdot)$满足：对任意的$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$，都有

$$P\left(\lim_n \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} = \eta\right) = 1,$$

而η相对于P的分布就是σ，即

$$P(\eta\leqslant x) = \sigma([0,x]).$$

证明 设l是任意非负实数，如果$\sigma=\delta_l$，则$P=P_{l\lambda}$。这时令

$$\mu_n = \mu(A_n\backslash A_{n-1}), \qquad n\geqslant 1,$$

则$\{\mu_n\}$相对于于P是相互独立随机变量序列，μ_n的数学期望和方差都是$l\lambda(A_n\backslash A_{n-1})$。利用强大数定理得：

$$P_{l\lambda}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(A_n)}\sum_{k=1}^{n}\mu_k=l\right)=1;$$

现设σ是$[0,\infty)$上的分布。由于

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}\text{存在}\right)\sigma(dl)=\int P_{l\lambda}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}\text{存在}\right)\sigma(dl)$$

$$=\int P_{l\lambda}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}=l\right)\sigma(dl)=1,$$

从而$\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}$关于$P$几乎处处收敛于$(N,\mathbf{N})$上的某个非负随变量$\eta$，并且

$$P(\eta\leqslant x)=\int P_{l\lambda}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}\leqslant x\right)\sigma(dl)$$

$$=\int_0^x P_{l\lambda}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}=l\right)\sigma(dl)$$

$$=\int_0^x\sigma(dl)=\sigma([0,x]);$$

现在，设有另一列$A'_n\uparrow X$，则对任意的$l\in R_+$，亦有

$$P_{l\lambda}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A'_n)}{\lambda(A'_n)}=l\right)=1.$$

如果记

$$\eta'=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A'_n)}{\lambda(A'_n)},$$

则有

$$P(\eta\neq\eta')=\int P_{l\lambda}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}\neq\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A'_n)}{\lambda(A'_n)}\right)\sigma(dl)=0,$$

所以$\eta=\eta'$ $(a.e.P)$。

39. 定理 设P是$(N,\mathbf{N})$上的分布，则P是混合型 Poisson 分布，当且仅当存在$\lambda\in M$以及非负随机数分布σ，使

$$\mathscr{C}_P^T(\cdot)=\lambda\times\int lP_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl),$$

而且$\int lP_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$是$(N,\mathbf{N})$上的$\sigma$有限测度。

证明 *必要性* 设P是混合型 Poisson 分布，则存在$\lambda\in M$以及非负随机数分布σ使

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl),$$

于是由定理13，如果$\mathscr{E}_P^T$存在，则

$$\mathscr{E}_P^T(\cdot)=\int l\lambda\times P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)=\lambda\times\int lP_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl).$$

现证明$\int lP_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$是$(N,\mathbf{N})$上的$\sigma$有限测度。

首先设$\lambda(X)<\infty$。由引理27得

$$P(\mu:\mu(X)<\infty)=1,$$

令

$$Y_n=\{\mu:\mu(X)\leqslant n\},\quad n=1,2,\cdots,$$

则$Y_n\uparrow N$而

$$\begin{aligned}&\int lP_{l\lambda}(Y_n)\sigma(dl)\\&=\int l\sum_{k=0}^{n}e^{-l\lambda(X)}\frac{1}{k!}(l\lambda(X))^k\sigma(dl)\\&=\frac{1}{\lambda(X)}\int\sum_{k=0}^{n}e^{-l\lambda(X)}\frac{(l\lambda(X))^{k+1}}{k!}\sigma(dl)\\&\leqslant\frac{n+1}{\lambda(X)}\int\sum_{k=0}^{n+1}e^{-l\lambda(X)}\frac{(l\lambda(X))^{k+1}}{(k+1)!}\sigma(dl)\leqslant\frac{n+1}{\lambda(X)}<\infty,\end{aligned}$$

从而$\int lP_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$是$(N,\mathbf{N})$上的$\sigma$有限测度。

现设$\lambda(X)=\infty$。选取$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$，且

$$0<\lambda(A_n)<\infty,\quad n=1,2,\cdots,$$

由引理38知

$$\int lP_{l\lambda}(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}\text{不存在})\sigma(dl)=0\tag{1}$$

而对所有的$x>0$有

$$\int lP_{l\lambda}(\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}\leqslant x)\sigma(dl)=\int_0^x l\sigma(dl)\leqslant x\sigma([0,x])<\infty,\tag{2}$$

现令

$$Y_m=\{\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}\leqslant m\},\qquad m=1,2,\cdots,$$

由上面的(1)式，$Y_m\uparrow N$，而由(2)式得

$$\int lP_{l\lambda}(Y_m)\sigma(dl)\leqslant m\sigma([0,m])<\infty,$$

这说明$\int lP_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$确为$\sigma$有限的。

充分性 假定存在$\lambda\in M$以及非负随机数分布σ使

$$\mathscr{E}_P^T(\cdot)=\lambda\times\int lP_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl),$$

由于 $\mathscr{C}_P^T$是σ有限测度，因此$\mathscr{C}_P$也是σ有限的。现令

$$P' = \int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl),$$

则由必要性部分的证明 知$\mathscr{C}_{P'}^T = \lambda \times \int l P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl)$。由Campbell 测度的唯一性定理，知$P = P'$(注意：这里的唯一性定理是对$\mathscr{C}$而言的，但$\mathscr{C}_P^T = \mathscr{C}_P T^{-1}$其中$T^{-1}$是本章12段 所定义的变换，因此关于$\mathscr{C}_P$的唯一性定理对 于$\mathscr{C}_P^T$也成立)。证毕。

40. 定理 设λ是$(X, \mathscr{A})$上的分布，则在M上的分布P是G_λ型分布，当且仅当

$$\mathscr{C}_P^T = \lambda \times \sum_{k=1}^{\infty} kP(\mu: \mu(X) = k) Q_\lambda^{k-1} .$$

证明 必要性 由引理8，对任意的$k>1$，

$$\mathscr{C}_{Q_\lambda^k}^T(\cdot) = k(\mathscr{C}_{Q_\lambda} \otimes Q_\lambda^{k-1})^T = k(\int \delta_a \times (\delta_{\delta_a} * Q_\lambda^k)(\cdot)\lambda(da))^T$$

$$= k(\int (\delta_a \times Q_\lambda^k)(\cdot)\lambda(da)) = \lambda \times kQ_\lambda^{k-1},$$

从而由定理28，如果P是G_λ型分布，则

$$\mathscr{C}_P^T = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(k)\mathscr{C}_{Q_\lambda^k}^T = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(k)(\lambda \times kQ_\lambda^{k-1})$$

$$= \lambda \times \sum_{k=1}^{\infty} kP_X(k)Q_\lambda^{k-1} .$$

充分性 与定理39的证明一样。

结合定理39与定理40，我们完全搞清楚了G_λ型分布的 Campbell 测度的结构。因为如果$\lambda(X) = \infty$，G_λ型分布就是混合型 Poisson 分布(定理26)；而当$\lambda(X) < \infty$时，G_λ型分布的 Campbell 测度由定理40给出。

下述定理给出了 Cox 分布的 Campbell 测度。

41. 定理 设$P \in \mathscr{P}_N$，则P是 Cox 分布，当且仅当

$$\mathscr{C}_P^T = \int (\lambda \times P_\lambda)G(d\lambda) .$$

证明 与定理39，40一样。

第六章　平稳点过程

在点过程的理论研究及实际应用中，平稳点过程是理论研究开展得最早而实际应用最多的部分。Palm测度论及平稳点过程的遍历理论已经被研究得相当彻底，本章将对此作较详细的论述。

§1. 平稳随机测度

1. 设m是一个任意固定的正整数，(R^m, ρ_{R^m})是m维的欧氏空间，其中ρ_{R^m}是通常的欧氏距离。以$\mathscr{A}^m$，$\mathscr{B}^m$分别记R^m中的Borel集类和有界Borel集类。

本章专门讨论以(R^m, ρ_{R^m})为相空间的随机点过程，因此除了以(R^m, ρ_{R^m})取代前面各章中的一般相空间(X, ρ_X)以外，其余一切记号的含义都假定在相空间为(R^m, ρ_{R^m})的条件下给出。例如M表示(R^m, ρ_{R^m})上的全体局部有限测度，N表示其中全体记数测度等等（按照第Ⅰ章中关于记号的约定，M与N本来应记为$M(R^m)$和$N(R^m)$，但本章只讨论(R^m, ρ_{R^m})上的平稳点过程，因而将$M(R^m)$与$N(R^m)$简记为M，N不致引起混淆）。

设$t \in R^m$，令

$$T_t a = a - t, \quad a \in R^m,$$

并称T_t为推移算子。显然

$$(t, a) \frown T_t a$$

是$R^m \times R^m$到R^m的连续映象。

设$\lambda \in M$。对固定的$t \in R^m$，以$T_t\lambda$记λ在映象T_t：$a \frown a - t$之下所诱导的测度，即

$$(T_t\lambda)(A) = \lambda(A + t), \quad A \in \mathscr{A}^m,$$

其中$A + t = \{a \in R^m: a - t \in A\}$。

2. 引理　映象

$$(t, \lambda) \frown T_t \lambda$$

是$R^m \times M$到M的连续映象。

证明　设$t_n \to t$，$\lambda_n \overset{l}{\Rightarrow} \lambda$，又设$f(\cdot)$是$R^m$上的任意一个具有有界支承的有界连续函数。于是

$$\int f(a) T_{t_n}\lambda_n(da) = \int f(a - t_n)\lambda_n(da), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\int f(a) T_t \lambda(da) = \int f(a - t)\lambda(da),$$

以及

$$\left| \int f(a - t_n)\lambda_n(da) - \int f(a - t)\lambda(da) \right|$$

$$\leqslant \left| \int f(a-t_n)\lambda_n(da) - \int f(a-t)\lambda_n(da) \right|$$

$$+ \left| \int f(a-t)\lambda_n(da) - \int f(a-t)\lambda(da) \right|,$$

任给$\varepsilon>0$，由于$\lambda_n \overset{l}{\Rightarrow} \lambda$，故可取$n_0$，使当$n \geqslant n_0$时有

$$\left| \int f(a-t)\lambda_n(da) - \int f(a-t)\lambda(da) \right| < \varepsilon;$$

又因为f在R^m上连续且有有界支承，故无妨设f在某紧集B外为0且在R^m上一致连续。于是由$t_n \to t$可知，存在n_0'，使当$n \geqslant n_0'$时，

$$|f(a-t_n) - f(a-t)| < \varepsilon, \quad a \in R^m;$$

从而只要$n \geqslant n_0'$就有

$$\left| \int f(a-t_n)\lambda_n(da) - \int f(a-t)\lambda(da) \right| \leqslant \varepsilon \lambda_n(B);$$

因为$\lambda_n \overset{l}{\Rightarrow} \lambda$，$B$是紧集，故$\{\lambda_n(B)\}$有界。令

$$r = \sup_n \{\lambda_n(B)\},$$

则当$n \geqslant \max(n_0, n_0')$时有

$$\left| \int f(a-t_n)\lambda_n(da) - \int f(a-t)\lambda(da) \right| < \varepsilon + \varepsilon \cdot r,$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty} \int f(a) T_{t_n} \lambda_n(da) = \int f(a) T_t \lambda(da),$$

于是得 $T_{t_n} \lambda_n \overset{l}{\Rightarrow} T_t \lambda$.

3. 定义 设P是$(M,\mathbf{M})$上的σ有限测度，对$t \in R^m$，以PT_t^{-1}记P在映象$\mu \frown T_t\mu$之下所诱导的测度。如果对所有的$t \in R^m$，都有

$$PT_t^{-1} = P, \quad t \in R^m,$$

则称P是平稳的。

4. 设h是$(M,\mathbf{M})$上定义的非负可测函数，$\lambda \in M$。令

$$h_n(\lambda) = \frac{1}{(2n)^m} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} h(T_t\lambda) L(dt), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中L是Lebesgue测度。记

$$\bar{h}(\lambda) = \limsup_{n\to\infty} h_n(\lambda);$$

$$\underline{h}(\lambda) = \liminf_{n\to\infty} h_n(\lambda).$$

下面的定理是测度论中熟知的结果：

Birkhoff定理：设P是$(M,\mathbf{M})$上的平稳测度，h是$(M,\mathbf{M})$上的任意非负可测函数，且

$$\int h(\lambda)P(d\lambda)<\infty,$$

则相对于P几乎处处有$\bar{h}(\lambda)=\underline{h}(\lambda)$，亦即极限

$$h^*(\lambda)=\lim_{n\to\infty} h_n(\lambda)$$

几乎处处存在。

应用这一结果，我们证明

5. 定理 设P是$(M,\mathbf{M})$上的平稳分布（即平稳的概率分布），又设h是$(M,\mathbf{M})$上的任意非负可测函数，且

$$\int h(\lambda)P(d\lambda)<\infty,$$

则有

$$\int h^*(\lambda)P(d\lambda)=\int h(\lambda)P(d\lambda).$$

证明 由定义推出

$$\int h_n(\lambda)P(d\lambda)=\int\frac{1}{(2n)^m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}h(T_t\lambda)L(dt)P(d\lambda)$$

$$=\frac{1}{(2n)^m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\int h(T_t\lambda)P(d\lambda)L(dt)$$

$$=\frac{1}{(2n)^m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\int h(\lambda)P(d\lambda)L(dt)=\int h(\lambda)P(d\lambda),$$

由Birkhoff定理，h^*存在$(a.e.P)$，故由Fatou引理得

$$\int h^*(\lambda)P(d\lambda)=\int\lim_{n} h_n(\lambda)P(d\lambda)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int h_n(\lambda)P(d\lambda)$$

$$=\int h(\lambda)P(d\lambda),$$

如果h有界，则由控制收敛定理得

$$\int h^*(\lambda)P(d\lambda)=\lim_{n\to\infty}\int h_n(\lambda)P(d\lambda)=\int h(\lambda)P(d\lambda);$$

如果h不是有界的，对于$s=1,2,\cdots$，令

$$h(s,\lambda)=\min(h(\lambda),s),\quad s=1,2,\cdots,$$

于是$h^*(s,\lambda)\leqslant h^*(\lambda)$，并且

$$\int h(s,\lambda)P(d\lambda)=\int h^*(s,\lambda)P(d\lambda)\leqslant\int h^*(\lambda)P(d\lambda),$$

令$s\to\infty$得

$$\int h(\lambda)P(d\lambda)\leqslant\int h^*(\lambda)P(d\lambda),$$

结合前面由Fatou引理所得到的不等式即得

$$\int h(\lambda)P(d\lambda)=\int h^*(\lambda)P(d\lambda).$$

上面的定理要求$\int h(\lambda)P(d\lambda)<\infty$，其实这个条件尚可略去。

6. 定理 设P是$(M,\mathbf{M})$上的平稳分布，h是定义于M的非负可测函数，则h^*相对于P几乎处处存在，并且

$$\int h^*(\lambda)P(d\lambda)=\int h(\lambda)P(d\lambda).$$

证明 令

$$h(s,\lambda)=\min\ (h(\lambda),s),\quad s=1,2,\cdots,$$

于是$h^*(s,\lambda)$存在$(a.e.P)$。以D_s记$h^*(s,\lambda)$不存在的集合，且记

$$D=\bigcup_{s=1}^{\infty}D_s,$$

则$P(D)=0$。

现设$\lambda\epsilon M\backslash D$。由于当$s\uparrow$时，$h^*(s,\lambda)\uparrow$，令

$$g(\lambda)=\sup_s\ h^*(s,\lambda),\quad \lambda\epsilon M\backslash D,$$

由于当$\lambda\epsilon M\backslash D$时有

$$h^*(s,\lambda)=\lim_{n\to\infty}\ h_n(s,\lambda)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\ h_n(\lambda),$$

所以

$$g(\lambda)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\ h_n(\lambda),$$

于是当$\lambda\epsilon M\backslash D$且$g(\lambda)=+\infty$时有

$$h^*(\lambda)=g(\lambda)=+\infty.$$

现设$0<c<\infty$，令

$$Y=\{\lambda:\ g(\lambda)\leqslant c\},$$

显然，若$\lambda\epsilon Y$，则$T_t\lambda\epsilon Y$，因而

$$\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}1_Y(T_t\lambda)h(s,T_t\lambda)L(dt)$$
$$=\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}1_Y(\lambda)h(s,T_t\lambda)L(dt)=1_Y(\lambda)\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}h(s,T_t\lambda)L(dt),$$

于是$(1_Y(\lambda)h(s,\lambda))^*$对一切$\lambda\epsilon M\backslash D$存在并且

$$(1_Y(\lambda)h(s,\lambda))^*=1_Y(\lambda)h^*(s,\lambda);$$

由定理5，

$$\int 1_Y(\lambda)h(\lambda)P(d\lambda)=\sup_s\int 1_Y(\lambda)h(s,\lambda)P(d\lambda)$$

$$=\sup_s\int_Y h^*(s,\lambda)P(d\lambda)=\int_Y g(\lambda)P(d\lambda)<\infty.$$

于是$1_Y(\lambda)h^*(\lambda)$在M上几乎处处存在，从而$h^*(\lambda)$在$\{\lambda:\ g(\lambda)<\infty\}$上几乎处处存在。前已证明$h^*$在$\{\lambda:\ g(\lambda)=\infty\}$上几乎处处存在，故$h^*$相对于$P$几乎处处存在。

当$\int h(\lambda)P(d\lambda)<\infty$时，本定理的结论即是定理5；而当$\int h(\lambda)P(d\lambda)=\infty$时，仍由

定理 5 可知

$$\int h(s,\lambda)P(d\lambda)\leqslant\int h^*(\lambda)P(d\lambda),$$

令 $s\to\infty$ 即得 $\int h^*(\lambda)P(d\lambda)=\infty$.

7. 定理 设 P 是 $(M,\mathbf{M})$ 上的平稳分布，h 是定义于 M 上的非负可测函数，且

$$\int h(\lambda)P(d\lambda)<\infty,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int\left|h_n(\lambda)-h^*(\lambda)\right|P(d\lambda)=0.$$

证明 仍令

$$h(s,\lambda)=\min(h(\lambda),s),\quad s=1,2,\cdots,$$

则

$$\int\left|h_n(\lambda)-h^*(\lambda)\right|P(d\lambda)$$

$$\leqslant\int\left|h^*(\lambda)-h^*(s,\lambda)\right|P(d\lambda)+\int\left|h^*(s,\lambda)-h_n(s,\lambda)\right|P(d\lambda)$$

$$+\int\left|h_n(s,\lambda)-h_n(\lambda)\right|P(d\lambda),$$

对右边第一项令 $s\to\infty$ 可得(由定理5)：

$$\lim_{s\to\infty}\int\left|h^*(\lambda)-h^*(s,\lambda)\right|P(d\lambda)$$

$$=\lim_{s\to\infty}\int(h^*(\lambda)-h^*(s,\lambda))P(d\lambda)=0;$$

对于第二项由控制收敛定理有：

$$\lim_{n\to\infty}\int\left|h^*(s,\lambda)-h_n(s,\lambda)\right|P(d\lambda)$$

$$=\int\lim_{n\to\infty}\left|h^*(s,\lambda)-h_n(s,\lambda)\right|P(d\lambda)=0;$$

对于第三项我们有：

$$\lim_{s\to\infty}\int\Big\{\frac{1}{(2n)^m}\Big(\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}h(T_t\lambda)L(dt)$$

$$-\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}h(s,T_t\lambda)L(dt)\Big)\Big\}P(d\lambda)$$

$$=\lim_{s\to\infty}\Big(\int h(\lambda)P(d\lambda)-\int h(s,\lambda)P(d\lambda)\Big)=0,$$

定理的结论不难得出。

§2. 遍 历 定 理

7. 定义 设$Y\in\mathbf{M}$，如果对任意的$t\in R^m$，由$\lambda\in Y$可推出$T_t\lambda\in Y$，则称Y是**不变集**。显然，全体不变集作成$\mathbf{M}$的一个子σ代数，记为$\overline{\mathbf{M}}$。

现设P是$(M,\mathbf{M})$上的平稳分布，如果对任意$Y\in\overline{\mathbf{M}}$，有$P(Y)=0$或1，则称$P$是**遍历的**。$\overline{\mathbf{M}}$可测的广义实函数，称为**不变函数**。

8. 引理 设h是定义于$(M,\mathbf{M})$上的非负广义实函数，关于$\mathbf{M}$可测。则h是不变函数当且仅当对任意的$t\in R^m$，

$$h(\lambda)=h(T_t\lambda),\quad \lambda\in M.$$

证明 假定对一切$t\in R^m$，都有

$$h(\lambda)=h(T_t\lambda),\quad \lambda\in M,$$

设B是$[0,\infty]$中的任意Borel集，我们要证

$$\{\lambda:\ h(\lambda)\in B\}\in\overline{\mathbf{M}},$$

事实上，如果$\lambda\in\{\lambda:\ h(\lambda)\in B\}$，则由于$h(T_t\lambda)=h(\lambda)$，可知$T_t\lambda\in\{\lambda:h(\lambda)\in B\}$，即$\{\lambda:\ h(\lambda)\in B\}\in\overline{\mathbf{M}}$。

反之，如果h是$\overline{\mathbf{M}}$可测的，则对任意的$c\geqslant 0$，

$$\{\lambda:\ h(\lambda)=c\}\in\overline{\mathbf{M}},$$

任取$\lambda\in\{\lambda:\ h(\lambda)=c\}$，则$T_t\lambda\in\{\lambda:h(\lambda)=c\}$，即

$$h(T_t\lambda)=h(\lambda).$$

9. 引理 对任意$(M,\mathbf{M})$上定义的非负可测函数h，h^*是不变函数。

证明 设$t\in R^m$，则当$s\geqslant\rho_{R^m}(0,t)=\|t\|$，以及$n>s$时有

$$\frac{(2n)^{-m}}{(2(n-s))^{-m}}(2(n-s))^{-m}\int_{-(n-s)}^{(n-s)}\cdots\int_{-(n-s)}^{(n-s)}h(T_\tau\lambda)L(d\tau)$$

$$\leqslant(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}h(T_{t+\tau}\lambda)L(d_\tau)$$

$$\leqslant\frac{(2n)^{-m}}{(2(n-s))^{-m}}(2(n+s))^{-m}\int_{-(n+s)}^{n+s}\cdots\int_{-(n+s)}^{n+s}h(T_\tau\lambda)L(d_\tau)$$

令$n\to\infty$即得：

$$h^*(T_t\lambda)=\lim_{n\to\infty}h_n(T_t\lambda)=h^*(\lambda),$$

于是由引理8知h^*是不变函数。

10. 定理 设P是$(M,\mathbf{M})$上的平稳分布，则下述命题等价：

1) P是遍历的；

2) 对任意$\mathbf{M}$可测的非负广义实函数h有

$$h^*=\int h(\lambda)P(d\lambda),\qquad (a.e.P);$$

3) 对任意的$Y_1,Y_2\in\mathbf{M}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P(Y_1\cap T_tY_2)L(dt)=P(Y_1)P(Y_2);$$

4) 如果存在平稳分布P_1，P_2以及非负数$\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant 1$，使

$$P=\alpha P_1+(1-\alpha)P_2,$$

则或者$\alpha=0$或1，或者$P_1=P_2$。

证明 1)⇒2)，设P遍历，则对任意的不变集Y有$P(Y)=0$或1；如果h是任意的非负可测广义实函数，则由引理6，

$$\int h^*(\lambda)P(d\lambda)=\int h(\lambda)P(d\lambda),$$

但由引理9，h^*是$\overline{\mathbf{M}}$可测函数，从而h^*只能几乎处处(相对于P)是常数，即

$$h^*=\int h(\lambda)P(d\lambda),\ (a.e.P).$$

2)⇒3) 对任意$n>0$及$Y_1,Y_2\in\mathbf{M}$，我们有

$$\int_{Y_1}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}1_{Y_2}(T_{-t}\lambda)L(dt)P(b\lambda)$$

$$=(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\left(\int_{Y_1}1_{Y_2}(T_{-t}\lambda)P(d\lambda)\right)L(dt)$$

$$=(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P(Y_1\cap T_tY_2)L(dt),$$

应用控制收敛定理得：

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P(Y_1\cap T_tY_2)L(dt)=\int_{Y_1}1^*_{Y_2}(\lambda)P(d\lambda),$$

由条件2)得：

$$1^*_{Y_2}(\lambda)=\int 1_{Y_2}(\lambda)P(d\lambda)=P(Y_2),\qquad (a.e.P),$$

故最后得到：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n)^m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P(Y_1\cap T_tY_2)L(dt)=P(Y_1)P(Y_2).$$

3)⇒1) 假定3) 成立，设$Y_1=Y_2=Y\in\overline{\mathbf{M}}$，于是对任意$t\in R^m$，$T_tY=Y$。从而由3)得：

$$P(Y)=\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P(Y\cap T_tY)L(dt)=(P(Y))^2,$$

所以$P(Y)=0$或1，即P是遍历的。

4)⇒1) 用反证法。如果1)不成立，则存在$Y\in\overline{\mathbf{M}}$，$0<P(Y)<1$，令$\alpha=P(Y)$则

$$P=\alpha P(\cdot|Y)+(1-\alpha)P(\cdot|M\backslash Y),$$

从而4)不成立。所以必有4)⇒1)。

1)⇒4) 假定存在平稳分布P_1 P_2 及实数$\alpha,0\leqslant\alpha\leqslant 1$，使

$$P=\alpha P_1+(1-\alpha)P_2;$$

因为$P_1\ll P$，故若以h记P_1相对于P的Radon-Nikodym 导数，则对任意的$Y\in\mathbf{M}$，有

$$P_1(Y)=\int_Y h(\lambda)P(d\lambda);$$

由平稳性，对一切$t\in R^m$有

$$P_1(Y)=\int_Y h(T_t\lambda)P(d\lambda),$$

故$h(T_t(\cdot))=h(\cdot)$，$(a.\ e.\ P)$。于是

$$\int\left|h_n(\lambda)-h(\lambda)\right|P(d\lambda)$$
$$=\int\left|(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}(h(T_t\lambda)-h(\lambda))L(dt)\right|P(d\lambda)$$
$$\leqslant(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\left(\int\left|h(T_t\lambda)-h(\lambda)\right|P(d\lambda)\right)L(dt)=0$$

这说明$\int\left|h^*(\lambda)-h(\lambda)\right|P(d\lambda)=0$，即有

$$P_1(Y)=\int_Y h^*(\lambda)P(d\lambda),\ Y\in\mathbf{M};$$

于是h^*亦是P_1相对于P的Radon-Nikodym 导数。因为h^*是$\overline{\mathbf{M}}$可测的，故h^* = 常数$(a\cdot c\cdot P)$，于是由

$$P_1(Y)=h^*P(Y),\ Y\in\mathbf{M},$$

知$h^*=1(a.e.P)$，即$P_1=P$；类似可证$P_2=P$。4)得证。定理证毕。

§3. 平稳点过程

11. 定义 如果P是$(M,\ \mathbf{M})$上的平稳分布，而且

$$P(N)=1,$$

则称P是平稳点分布。

容易看出，如果P是平稳点分布，则对任意的$t\in R^m$，任意的$A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{A}^m$，以及任意的非负整数$j_1,\cdots,j_k$有

$$P(\mu:\ \mu(A_i+t)=j_i,\ 1\leqslant i\leqslant k)=P(\mu:\ \mu(A_i)=j_i,\ 1\leqslant i\leqslant k).$$

反之，如果Γ是$\mathscr{B}^m$的子环，并且$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}^m$，则$(N,\ \mathbf{N})$上的分布$P$如果满足条件：对任意$t\in R^m$，任意互不相交的$A_1,\cdots,A_k\in\Gamma$，以及任意的非负整数$j_1,\cdots,j_k$有

$$P(\mu:\ \mu(A_i+t)=j_i,\ 1\leqslant i\leqslant k)=P(\mu:\ \mu(A_i)=j_i,\ 1\leqslant i\leqslant k),$$

那么P是平稳点分布。

用定理Ⅱ.39容易证明：$(N,\ \mathbf{N})$上的分布P是平稳的，当且仅当：对任意的$f\in\mathscr{F}_+$，任意的$t\in R^m$，有

$$\Psi_P(f)=\Psi_P(T_tf),$$

其中$(T_tf)(a)=f(a-t)$。

12. 引理 在空间$(\mathscr{P}_N,\rho_{\mathscr{P}_N})$中，全体平稳分布组成的类是闭集。

证明 设$P_n\in\mathscr{P}_N$是平稳分布，$n=1,2,\cdots$，又设$P_n\overset{w}{\Longrightarrow}P\in\mathscr{P}_N$。因为对任意的$t\in R^m$及

任意的$f\in\mathscr{F}_+$，T_tf 也在$\mathscr{F}_+$中，且由诸P_n 的平稳性知

$$\Psi_{P_n}(f)=\Psi_{P_n}(T_tf),\quad n=1,2,\cdots,$$

所以由$P_n\overset{w}{\Longrightarrow}P$得

$$\Psi_P(f)=\Psi_P(T_tf),$$

由于$t\in R^m$及$f\in\mathscr{F}_+$的任意性知P为平稳分布。

13．引理 设P是$(M,\mathbf{M})$上的平稳分布，令

$$i_P=I_P([0,1)^m)=\int\mu([0,1)^m)P(d\mu)\leqslant\infty,$$

则有

$$I_P=i_PL,$$

其中L是Lebesgue测度。

证明 应用定义11后面的讨论，这结果是显然的。

称i_P为平稳分布P的强度。

14．定义 令

$$h(\mu)=\mu([0,\ 1)^m),\ \mu\in M,$$

$$S(\mu)=h^*(\mu)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^m\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}T_t\mu([0,1)^m)L(dt),\mu\in M,$$

由定理6，对任意的平稳分布P有

$$\int S(\mu)P(d\mu)=\int\mu([0,1)^m)P(d\mu)=i_P,$$

称$S(\mu)$为P的样本强度函数；令

$$\sigma_P(A)=P(\mu:\ S(\mu)\in A),\qquad A\in\mathscr{B}_{[0,\infty)},$$

称σ_P为样本强度分布。

上述定义稍许推广一下是有用的。设$E\in\mathscr{E}_+$，如果E是$(N,\mathbf{N})$上的平稳测度则仍有

$$\int S(\mu)E(d\mu)=\int\mu([0,1)^m)E(d\mu)=i_E\leqslant\infty,$$

如果$i_E<\infty$，则

$$E(\mu:\ S(\mu)=+\infty)=0,$$

于是可令

$$\sigma_E(A)=E(\mu:\ S(\mu)\in A),\qquad A\in\mathscr{B}_{[0,\infty)}.$$

15．引理 设$E_1,E_2\in\mathscr{E}_+$且为平稳的，则

$$\sigma_{E_1*E_2}=\sigma_{E_1}*\sigma_{E_2},$$

如果$E_1(\mu:\ S(\mu)=+\infty)=E_2(\mu:\ S(\mu)=+\infty)=0$，则

$$(E_1*E_2)(\mu:\ S(\mu)=+\infty)=0.$$

证明 由定义

$$S(\mu_1+\mu_2)=S(\mu_1)+S(\mu_2),\qquad \mu_1,\mu_2\in N,$$

于是

$$\sigma_{E_1 * E_2}(\cdot) = (E_1 * E_2)(\mu\colon S(\mu)\epsilon(\cdot))$$

$$= (E_1 \times E_2)((\mu_1,\mu_2)\colon S(\mu_1)+S(\mu_2)\epsilon(\cdot)) = (\sigma_{E_1} * \sigma_{E_2})(\cdot),$$

又当$E_1(\mu\colon S(\mu) = +\infty) = E_2(\mu\colon S(\mu) = +\infty) = 0$时有

$$(E_1 * E_2)(\mu\colon S(\mu) = +\infty) = (E_1 \times E_2)((\mu_1,\mu_2)\colon S(\mu_1)+S(\mu_2) = +\infty)$$

$$= (E_1 \times E_2)((\mu_1,\mu_2)\colon S(\mu_1) = +\infty \text{或} S(\mu_2) = +\infty) = 0.$$

下述引理今后要用到。

16. 引理 设$P\epsilon\mathscr{P}_N$是平稳分布，$P(\{0\}) = 0$，

则

$$S(\mu) > 0,\ (a.e.P).$$

证明 由于$\{\mu\colon S(\mu) = 0\}$是不变集，故如果

$$P(\mu\colon S(\mu) = 0) > 0,$$

则条件分布

$$P_1(\cdot) = P(\cdot\,|S(\mu) = 0)$$

是平稳分布。由于

$$i_{P_1} = \int S(\mu)P_1(d\mu) = 0,$$

故$P_1(\{0\}) = 1$，即$P(\{0\}|S(\mu) = 0) = 1$，从而

$$P(\{0\}) > 0,$$

这与假设矛盾。

§4. 平稳Poisson过程

17. 定理 设$P\epsilon\mathscr{P}_N$是平稳的。为使P是以$l\cdot L$为强度测度的Poisson分布(其中l是某个非负实数)，当且仅当P是有序的和无后效的。

证明 *必要性* 设$P = P_{lL}$。由于lL作为$(R^m, \mathscr{A}^m)$上的测度是扩散的，所以由定理Ⅱ.40知P是简单的。又由定理Ⅱ.29知P是有序的。另外，Poisson分布总是无后效的。

充分性 首先，任意的平稳分布必是连续分布。事实上，如果有$a\epsilon R^m$，使

$$P(\mu\colon \mu(a) > 0) > 0,$$

则由平稳性知对任意的$t\epsilon R^m$都有

$$P(\mu\colon \mu(a+t) > 0) > 0,$$

但因为

$$\{a\epsilon R^m\colon P(\mu\colon \mu(a) > 0) > 0\}$$

至多可数，于是得到矛盾。所以任意的平稳分布必然是连续分布。

现在令

$$P(\mu\colon \mu([0,1)^m) = 0) = \theta,$$

则$0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 记$\theta = e^{-l}$，则$0 \leqslant l \leqslant +\infty$. 可以证明$l < \infty$. 事实上，如果$l = +\infty$，则$\theta = 0$，从而

$$P(\mu\colon \mu([0,1)^m) = 0) = 0,$$

由此并利用P的平稳性及无后效性可知对任意的正整n有：

$$P(\mu:\ \mu([0,\frac{1}{n})^m)=0)=\theta^{(\frac{1}{n})^m}=0,$$

从而

$$P(\mu:\ \mu([0,\frac{1}{n})^m)>0)=1,$$

令$n\to\infty$即得：

$$P(\mu:\ \mu(0,\cdots,0)>0)=1,\ (0,\cdots,0)\epsilon R^m,$$

这与P为连续分布矛盾。于是$l<+\infty$。

为证明$P=P_{lL}$，根据定理Ⅱ.23，只须证明：对任意的正数$t_1,\cdots,t_m$有：

$$P(\mu:\ \mu([0,t_1)\times\cdots\times[0,t_m))=0)$$

$$=(e^{-l})^{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i}=e^{-l\cdot L([0,t_1)\times\cdots\times[0,t_m))}. \tag{1}$$

为此，首先利用P的平稳性及无后效性推出：对任意的正整数$p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_m$，有

$$P(\mu:\ \mu([0,p_1/q_1)\times\cdots\times[0,p_m/q_m))=0)=(e^{-l})^{\prod\limits_{i=1}^{m}p_i/q_i},$$

即对任意正有理数$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$有

$$P(\mu:\ \mu([0,\gamma_1)\times\cdots\times[0,\gamma_m))=0)=(e^{-l})^{\prod\limits_{i=1}^{m}\gamma_i}, \tag{2}$$

然后对任意给定的正数$t_1,\cdots,t_m$,取有理数列$\gamma_1^{(n)},\cdots,\gamma_m^{(n)}$,使当$n\to\infty$时

$$\gamma_i^{(n)}\uparrow t_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

利用(2)式令$n\to\infty$即得欲证之(1)式。定理证毕。

18. 例 设σ是$[0,\infty)$上的概率分布，且

$$\int_0^\infty l\sigma(dl)=\infty,$$

又设L是R^m上的Lebesgue测度。考虑混合型Poisson分布

$$P(\cdot)=\int P_{lL}(\cdot)\sigma(dl)$$

由于固定$l\geqslant 0$时，P_{lL}是平稳简单分布，故P也是平稳简单分布。但是

$$i_P=\int\mu([0,1)^m)P(d\mu)=\sum_{j=0}^{\infty}jP(\mu:\ \mu([0,1)^m)=j)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}j\int e^{-l}\frac{l^j}{j!}\sigma(dl)=\int l\sigma(dl)=+\infty,$$

这个例子说明：$i_P=\infty$的平稳简单分布是存在的。一般说来，任给一个点分布P，总有

$$I_{P*}\leqslant I_P$$

这里P^*是与P对应的简单点分布。但当$I_P\in M$并且 $I_{P^*}=I_P$ 时，则 $P=P^*$。事实上，设S_n，$n=1,2,\cdots$是X中以某点为中心而以n为半径的球，由于 $I_{P^*}=I_P\in M$,知：

$$\int\mu^*(S_n)P(d\mu)=\int\mu(S_n)P(d\mu),\quad n=1,2,\cdots,$$

即有

$$\int(\mu-\mu^*)(S_n)P(d\mu)=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

从而

$$P(\mu:\ \mu(S_n)\neq\mu^*(S_n))=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$P(\mu:\ \mu\neq\mu^*)=0.$$

但当$I_P\notin M$时，即使 $I_P=I_{P^*}$，也不一定有$P=P^*$.例如在上面的例子中，由于$i_P=\infty$，故I_P不在M中。此时若以Q记P在映象$\mu\frown 2\mu$之下所诱导出来的分布，则因为$Q^*=P$，以及

$$i_Q\geqslant i_{Q^*}=i_P=\infty,$$

可知 $I_Q=I_{Q^*}=I_P\notin M$，但显然$Q\neq Q^*$。

§5. Palm 测度

19. 定义 由引理 2 知，从$R^m\times N$到$R^m\times N$的映象：

$$(a,\mu)\frown(a,T_a\mu)$$

是可测映象。令

$$(T\mu)(\cdot)=\sum_{a\in R^m,\mu(a)>0}\mu(a)\delta_{(a,T_a\mu)}(\cdot),$$

则$(T\mu)(\cdot)$是$(R^m\times N,\mathscr{A}^m\times \mathbf{N})$上的测度。

20. 引理 令

$$N^0=\{\mu:\ \mu\in N,\mu(0,\cdots,0)>0\}$$

其中$(0,\cdots,0)\in R^m$.则对任意的$\mu\in N$有

$$(T\mu)(R^m\times(N\backslash N^0))=0.$$

证明 由定义，对任意$a\in R^m$,如果$\mu(a)>0$,则

$$(T_a\mu)(0,\cdots,0)=\mu(a)>0,$$

于是$T_a\mu\in N^0$,从而

$$(T\mu)(R^m\times(N\backslash N^0))$$
$$=\sum_{a\in R^m,\mu(a)>0}\mu(a)\delta_{(a,T_a\mu)}(R^m\times(N\backslash N^0))=0.$$

根据这一引理，对于任意$\mu\in N$,我们可以将$(T\mu)(\cdot)$看作是$\mathscr{A}^m\times\mathbf{N}^0$上的测度，其中$\mathbf{N}^0=\mathbf{N}\cap N^0$。

现设H是$\mathbf{N}$上的测度，令

$$T\mathscr{C}_H(\cdot)=\int T\mu(\cdot)H(d\mu).$$

21. 引理 设H是$(N,\mathbf{N})$上的平稳测度，则对任意$Y\in\mathbf{N}^{\circ}$，$A\in\mathscr{B}$，以及$t\in R^{m}$，有

$$T\mathscr{C}_H(A\times Y)=T\mathscr{C}_H(A+t)\times Y).$$

证明 由平稳性定义推得：

$$T\mathscr{C}_H(A\times Y)=\int\sum_{\tau\in R^m,\mu(\tau)>0}1_A(\tau)1_Y(T_\tau\mu)\mu(\tau)H(d\mu)$$

$$=\int\sum_{\tau\in R^m,T_t\mu(\tau)>0}1_A(\tau)1_Y(T_\tau T_t\mu)T_t\mu(\tau)H(d\mu)$$

$$=\int\sum_{\tau\in R^m,\mu(t+\tau)>0}1_A(\tau)1_Y(T_{t+\tau}\mu)\mu(t+\tau)H(d\mu)$$

$$=\int\sum_{s\in R^m,\mu(s)>0}1_A(s-t)1_Y(T_s\mu)\mu(s)H(d\mu)$$

$$=\int\sum_{s\in R^m,\mu(s)>0}1_{A+t}(s)1_Y(T_s\mu)\mu(s)H(d\mu)=T\mathscr{C}_H(A+t)\times Y).$$

22. 定义 由于上述引理，当H是$(N,\mathbf{N})$上的平稳测度时，对任意的$Y\in\mathbf{N}^{\circ}$,有

$$T\mathscr{C}_H(A\times Y)=Q(Y)L(A),\quad A\in\mathscr{B}^m,$$

其中$Q(Y)$是$\mathbf{N}^{\circ}$上的测度。令$A=[0,1)^m$,则

$$Q(Y)=T\mathscr{C}_H([0,1)^m\times Y),$$

称$Q(\cdot)$为平稳测度H的Palm测度，并记作H°。

23. 引理 设$(\Omega,\mathscr{T})$是任意的可测空间，η是$(\Omega,\mathscr{T})$上的测度。则η是σ有限的，当且仅当存在定义于$(\Omega,\mathscr{T})$上处处严格正的可测函数$f(\omega)$使

$$\int f(\omega)\eta(d\omega)<\infty.$$

证明 *必要性* 设η是σ有限测度，则存在一列互不相交的$\Omega_n\in\mathscr{T}$，$n=1,2,\cdots$,使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n=\Omega,\quad \eta(\Omega_n)<\infty,\quad n=1,2,\cdots,$$

无妨设$\eta(\Omega_n)>0$.定义

$$f(\omega)=\frac{1}{n^2\eta(\Omega_n)},\qquad 当\omega\in\Omega_n时,$$

则$f(\omega)$是处处严格正的可测函数，并且

$$\int f(\omega)\eta(d\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

充分性 设$f(\omega)$可测，$f(\omega)>0$ 凡 $\omega\in\Omega$,并且

$$\int f(\omega)\eta(d\omega)<\infty$$

令

$$\Omega_n=\{\omega:\ f(\omega)\geqslant\frac{1}{n}\},\quad n=1,2\cdots,$$

则$\Omega_n\in\mathscr{T}$，$\Omega_n\uparrow\Omega$，并且

$$\eta(\Omega_n)\leqslant n\int f(\omega)\eta(d\omega)<\infty,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以η是σ有限的。

24. **定理** 设H是**N**上的测度，$H((\cdot)\backslash\{0\})$是$\sigma$有限的，则$H$是平稳的充分必要条件为：存在$\mathbf{N}^0$上的$\sigma$有限测度$Q$使

$$T\mathscr{C}_H=L\times Q.$$

证明 必要性 设H是平稳的。由引理22知$T\mathscr{C}_H=L\times Q$。因此只须证明Q是σ有限的。由于$H((\cdot)\backslash\{0\})$是$\sigma$有限的，由定理Ⅳ.5知$T\mathscr{C}_H$是$\sigma$有限的。于是由引理23存在$R^m\times\mathbf{N}^0$上处处为正的可测函数$f(t,\mu)$使

$$\int f(t,\mu)T\mathscr{C}_H(dt,\mu))<+\infty,$$

即

$$\int f(t,\mu)T\mathscr{C}_H(d(t,\mu))=\iint f(t,\mu)L(dt)Q(d\mu)<\infty,$$

然而$\int f(t,\mu)L(dt)$在$\mathbf{N}^0$上处处为正，故由引理23知Q是σ有限的。

充分性 设Q是$\mathbf{N}^0$上的σ有限测度，$T\mathscr{C}_H=L\times Q$。设$A\in\mathscr{A}^m$，$\tau\in R^m$，$Y\in\mathbf{N}^0$，$Q(Y)<\infty$，则

$$T\mathscr{C}_H(A\times Y)=L(A)Q(Y)=L(A+\tau)Q(Y)$$

$$=\iint_{A+\tau}\delta_{T_t\mu}(Y)\mu(dt)H(d\mu)=\iint_A\delta_{T_t(T_\tau\mu)}(Y)(T_\tau\mu)(dt)H(d\mu)$$

$$=\iint_A\delta_{T_t\nu}(Y)\nu(dt)H(T_\tau\mu\in d\nu)\quad=T\mathscr{C}_{H(T_\tau\mu\in\cdot)}(A\times Y).$$

由唯一性定理Ⅳ.4知

$$H((\cdot)\backslash\{0\})=H(T_\tau\mu\in((\cdot)\backslash\{0\})),$$

对一切$\tau\in R^m$成立。因而$H((\cdot\backslash\{0\})$是平稳的，所以$H(\cdot)=H((\cdot)\backslash\{0\})+H(\{0\})\delta_0$也是平稳的。

25 推论 设H是**N**上的平稳测度，而$H((\cdot)\backslash\{0\})$是$\sigma$有限的。则对任意定义于$R^m\times N^0$上的非负可测函数$f(a,\mu)$有：

$$\iint f(a,T_a\mu)\mu(da)H(d\mu)$$

$$=\int\sum_{a\in R^m,\mu(a)>0}f(a,T_a\mu)\mu(da)H(d\mu)=\int f(a,\mu)L\times H^0(da\times d\mu).$$

证明 由定理24，下式

$$\int f(a,\mu)L\times H^0(da\times d\mu)=\int f(a,\mu)T\mathscr{C}_H(d(a,\mu))$$

对任意$f(a,\mu)=1_{A\times Y}(a,\mu)(A\in\mathscr{A}^m,\ Y\in\mathbf{N}^0)$成立。应用单调类定理可得欲证。

本推论中的公式，习惯上称为魔术公式。它在Palm测度论中应用起来是颇为方便

的。

下面给出Palm测度的一些简单性质。如引理13中定义i_P一样，我们令

$$i_H = \int \mu([0,1)^m H(d\mu).$$

又如定义7，我们以$\overline{\mathbf{N}}$记$\mathbf{N}$中全体不变子集。

26. 定理 如果H是$(N,\mathbf{N})$上的平稳测度并且$H((\cdot)\backslash\{0\})$是$\sigma$有限的。则

1) $i_H = H^0(N^0)$;

2) $(H((\cdot)\cap Y))^0 = H^0((\cdot)\cap Y)$, $Y\in\overline{\mathbf{N}}$;

3) H是简单的当且仅当H^0是简单的；而H^0是简单的当且仅当$H^0(\mu:\ \mu(0,\cdots,0)>1)=0$。

证明 1)可由i_H的定义及推论25中的公式推得。

2) 由$Y\in\overline{\mathbf{N}}$可知$H((\cdot)\cap Y)$是平稳测度。现对任意的$A\in\mathscr{B}^m$, $Y_1\in\mathbf{N}$, 由于

$$T\mathscr{C}_{H((\cdot)\cup Y)}(A\times Y_1) = \int T\mu(A\times Y_1)H(Y\cap d\mu)$$

$$= T\mathscr{C}_H(A\times(Y_1\cap Y)) = L(A)H^0(Y\cap Y_1),$$

另一方面，由定理24得

$$T\mathscr{C}_{H((\cdot)\cap Y)}(A\times Y_1) = L(A)(H((\cdot)\cap Y))^0(Y_1),$$

由此得证2)。

因为$N_s\in\overline{\mathbf{N}}$, $N\backslash N_s\in\overline{\mathbf{N}}$, 对任意$A\in\mathscr{B}^m$有

$$L(A)H^0(N\backslash N_s) = T\mathscr{C}_H(A\times(N\backslash N_s))$$

$$= \iint 1_A(a)1_{N\backslash N_s}(T_a\mu)\mu(da)H(d\mu) = \iint 1_A(a)1_{N\backslash N_s}(\mu)\mu(da)H(d\mu)$$

$$= \int_{N\backslash N_s}\mu(A)H(d\mu),$$

由此知$H^0(N\backslash N_s)=0$当且仅当$H(N\backslash N_s)=0$，即H^0简单当且仅当H简单。

如果H^0是简单的，则按定义有

$$H^0(\mu:\ \mu(0,\cdots,0)>1)=0,$$

反之，如果上式成立，取$A\in\mathscr{A}^m$, $0<L(A)<\infty$, 令

$$f(a,\mu) = \begin{cases} \mu(0,\cdots,0)-1, & \text{当}a\in A,\\ 0, & \text{当}a\notin A,\end{cases}$$

由推论25得：

$$H(\mu:\ A\mu\in N\backslash N_s)$$

$$\leqslant \int \sum_{a\in R^m,\mu(a)>0} f(a,T_a\mu)\mu(a)H(d\mu) = \iint f(a,\mu)H^0(d\mu)L(da)$$

$$= L(A)\int(\mu(0,\cdots,0)-1)H^0(d\mu) = 0,$$

在上式中令$A\uparrow R^m$，可推知H是简单的，从而知H^0也是简单的。

下述定理给出Palm测度的另一本质刻划，在应用中它也是很方便的。

27. 定理 设Q是$\mathbf{N}$上的σ有限测度且满足$Q(N\backslash N^0)=0$。则Q是某个σ有限测度H的Palm测度的充分必要条件是：在映象

$$(a,\mu)\curvearrowright(-a,T_a\mu),\quad (a,\mu)\in R^m\times N^0$$

之下$\mathscr{C}_Q$是不变的，即对任意定义于$(R^m\times N^0,\ \mathscr{A}^m\times\mathbf{N}^0)$上的非负可测函数$\varphi(a,\mu)$有

$$\int\varphi(-a,\ T_a\mu)\mathscr{C}_Q(d(a,\mu))=\int\varphi(a,\mu)\mathscr{C}_Q(d(a,\mu)).$$

证明 *必要性* 设H σ有限而$Q=H^0$。由$\mathscr{C}_Q$的定义

$$\int\varphi(-a,T_a\mu)\mathscr{C}_Q(d(a,\mu))=\iint\varphi(-a,T_a\mu)\mu(da)H^0(d\mu)$$

$$=\iint\varphi(-a,T_a\mu)\mu(da)H^0(d\mu)\cdot\int 1_{(0,1]^m}(t)L(dt),$$

令

$$f(t,\mu)=\int\varphi(-a,\ T_a\mu)\mu(da)1_{(0,1]^m}(t),$$

由推论25得

$$\iint f(t,\mu)(L\times H^0)(d(t,\mu))=\iint f(t,T_t\mu)\mu(dt)H(d\mu),$$

但由$f(\cdot,\cdot)$的定义得

$$\int f(t,T_t\mu)\mu(dt)=\int\Big(\int\varphi(-a,T_tT_a\mu)T_t\mu(da)1_{(0,1]^m}(dt)\Big)\mu(dt)$$

$$=\int\Big(\int\varphi(t-\tau,\ T_\tau\mu)\mu(d\tau)1_{(0,1]^m}(t)\Big)\mu(dt)=\int g(\tau,\ T_\tau\mu)\mu(d\tau),$$

其中

$$g(\tau,T_\tau\mu)=\int\varphi(t-\tau,\ T_\tau\mu)1_{(0,1]^m}(t)\mu(dt),$$

再次应用推论25得：

$$\iint g(\tau,T_\tau\mu)\mu(d\tau)H(d\mu)$$

$$=\iint\Big(\int\varphi(t-\tau,\mu)1_{(0,1]^m}(t)T_{-\tau}\mu(dt)\Big)L\times H^0(d(\tau,\mu))$$

$$=\iint\Big(\int\varphi(s,\mu)1_{(0,1]^m}(\tau+s)\mu(ds)\Big)L\times H^0(d(\tau,\mu))$$

$$=\iint\varphi(s,\mu)\mu(ds)H^0(d\mu)=\iint\varphi(s,\mu)\mathscr{C}_{H^0}(d(s,\mu)),$$

这说明$\mathscr{C}_Q$在映象

$$(a,\mu)\curvearrowright(-a,T_a\mu),\quad (a,\mu)\in R^m\times N^0$$

之下是不变的。

充分性 设Q满足条件$Q(N\backslash N^0)=0$，并且$\mathscr{C}_Q$在上述映象之下不变。

令$h(a,\mu)$是定义于$(R^m\times N,\ \mathscr{A}^m\times\mathbf{N})$上的可测函数，满足

$$\int h(a,\mu)\mu(da)=1,\quad \mu\in N\backslash\{0\},$$

令

$$H(Y)=\iint 1_Y(T_{-a}\mu)h(a,T_{-a}\mu)L\times Q(d(a,\mu)),$$

则H是$\mathbf{N}$上的测度且$H(\{0\})=0$，

又设$g(a,\mu)$是定义于$(R^m\times N^0,\ \mathscr{A}^m\times\mathbf{N}^0)$上的任意非负可测函数，则由$T\mathscr{C}_H$的定义得

$$\int g(a,\mu)T\mathscr{C}_H(d(a,\mu))$$
$$=\iint g(a,T_a\mu)\mu(da)H(d\mu)=\int f(a,\mu)L\times Q(d(a,\mu)),$$

其中

$$f(a,\mu)=h(a,T_{-a}\mu)\int g(t,T_{t-a}\mu)T_{-a}\mu(dt)$$
$$=h(a,T_{-a}\mu)\int g(a+\tau,\ T_\tau\mu)\mu(d\tau),$$

从而

$$\int f(a,\mu)L\times Q(d(a,\mu))$$
$$=\int\{h(a,T_{-a}\mu)\int g(a+\tau,T_\tau\mu)\mu(d\tau)\}L\times Q(d(a,\mu))$$
$$=\iint\{\int h(a,T_{-a}\mu)g(a+\tau,T_\tau\mu)L(da)\}\mu(d\tau)Q(d\mu)$$
$$=\int\{\iint h(s-\tau,T_{\tau-s}\mu)g(s,T_\tau\mu)\mu(d\tau)Q(d\mu)\}L(ds)$$
$$=\iint h(s-\tau,T_{-s}T_\tau\mu)g(s,T_\tau\mu)\mathscr{C}_Q(d(\tau,\mu))L(ds),$$

由于$\mathscr{C}_Q$在映象$(\tau,\mu)\frown(-\tau,T_\tau\mu)$之下不变，故又得：

$$\int f(a,\mu)L\times Q(d(a,\mu))$$
$$=\iint h(s+\tau,T_{-s}\mu)g(s,\mu)\mathscr{C}_Q(d(\tau,\mu))L(ds)$$
$$=\int\{\int h(s+\tau,T_{-s}\mu)\mu(d\tau)\}g(s,\mu)L\times Q(d(s,\mu)),$$

但由h的选择可知

$$\int h(s+\tau,T_{-s}\mu)\mu(d\tau)$$
$$=\int h(t,T_{-s}\mu)(T_{-s}\mu)(dt)=1,$$

所以最后得

$$\int g(a,\mu)T\mathscr{C}_H(d(a,\mu))=\int g(a,\mu)L\times Q(d(a,\mu)),$$

因此$T\mathscr{C}_H=L\times Q$.由定理24知H是平稳的，且以Q为其Palm测度。

§6. 反演公式

28. 引理 设H是$(N,\mathbf{N})$上的σ有限测度且为平稳的，又$h(\cdot,\cdot)$是定义于$R^m\times N$上

的非负可测函数且$h(a,0)=1$以及

$$\int h(a,\mu)\mu(da)=1, \qquad \mu\in N\setminus\{0\},$$

则对任意定义于$(N,\mathbf{N})$上的非负可测函数$g(\cdot)$，$g(0)=0$有：

$$\int g(\mu)H(d\mu)=\int h(a,T_{-a}\mu)g(T_{-a}\mu)L\times H^{0}(d(a,\mu)).$$

证明 令

$$f(a,\mu)=h(a,T_{-a}\mu)g(T_{-a}\mu),$$

应用推论25得

$$\int h(a,T_{-a}\mu)g(T_{-a}\mu)L\times H^{0}(d(a,\mu))$$

$$=\iint h(a,\mu)g(\mu)\mu(da)H(d\mu)$$

$$=\int\Big(\int h(a,\mu)\mu(da)\Big)g(\mu)H(d\mu)=\int g(\mu)H(d\mu).$$

下面我们应用上述引理导出一个有用的关于Palm测度的反演公式(定理30)。为此先给出一些记号。

以$R_{[0,\infty)}$记半直线$[0,\infty)$，在$R_{[0,\infty)}$上的全体计数测度记为$N_{[0,\infty)}$，相应地有可测空间$(N_{[0,\infty)},\mathbf{N}_{[0,\infty)})$。

映象$a\frown\|a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}$ 将$(R^m,\mathscr{A}^m)$上的计数测度μ变为$R_{[0,\infty)}$上的计数测度$\mu^{(1)}\in N_{[0,\infty)}$，其中$a=(a_1,\cdots,a_m)\in R^m$。容易验证映象$\mu\frown\mu^{(1)}$是可测的。

29. 引理 设H是$\mathbf{N}$上的平稳测度，$H((\cdot)\setminus\{0\})$是σ有限的。则

$$H(\mu:\ 存在a_1,a_2\in R^m,a_1\neq a_2,\|a_1\|=\|a_2\|并且\mu(a_1)>0,\mu(a_2)>0)=0.$$

证明 以μ^*记μ所对应的简单计数测度，N_s记全体简单记数测度，又$(\mu^*)^{(1)}$表示上段中由μ^*所确定的计数测度。则$(\mu^*)^{(1)}(\|a\|)\geqslant 2$表示存在$R^m$中$a_1,a_2$，满足$a_1\neq a_2$，$\|a_1\|=\|a_2\|=\|a\|$且

$$\mu(a_1)>0,\quad \mu(a_2)>0.$$

显然

$$(a,\mu)\frown(\|a\|,(\mu^*)^{(1)})$$

是$(R^m\times N,\mathscr{A}^m\times\mathbf{N})$到$(R_{[0,\infty)}\times N_{[0,\infty)},\mathscr{A}_{[0,\infty)}\times\mathbf{N}_{[0,\infty)})$的可测映象。

记

$$Z=\{(a,\mu):\ (\mu^*)^{(1)}(\|a\|)\geqslant 2\},$$

则$Z\in R^m\times\mathbf{N}$。于是由推论25得

$$\iint 1_Z(a,\mu)\mu(da)H(d\mu)=\iint 1_Z(a,T_{-a}\mu)L\times H^{0}(da\times d\mu),$$

因为

$$\int 1_Z(a,T_{-a}\mu)L(da)=L(a:\ (a,T_{-a}\mu)\in Z)\leqslant L(a:\ \mu(a)>0)=0,$$

从而

$$\iint 1_Z(a,\mu)\mu(da)H(d\mu)=0,$$

这说明

$$\int 1_Z(a,\mu)\mu(da)=0, \qquad (a.e.H),$$

这显然表明

$$H(\mu:\ 存在 a_1,a_2\in R^m, a_1\neq a_2, \|a_1\|=\|a_2\|, 并且 \mu(a_1)>0, \quad \mu(a_2)>0)=0.$$

引理证毕。

30. 定理 设H是N上的平稳测度，$H((\cdot)\backslash\{0\})$是$\sigma$有限的。则对任意的$Y\in$**N**有

$$H(Y\backslash\{0\})=\int\frac{1}{\mu(0,\cdots,0)}\int_{\{a:\ \mu(S_{\|a\|}(a))=0\}} 1_Y(T_a\mu)L(da)H^0(d\mu),$$

其中$S_{\|a\|}(a)$表示以a为中心，以$\|a\|$为半径的开球。

证明 令

$$h(a,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu(t:\ \|t\|=\|a\|)}, & 如果 \mu(t:\ \|t\|=\|a\|)>0 且 \\ & \mu(t:\ \|t\|<\|a\|)=0; \\ 0, & 其余,\end{cases}$$

则显然

$$\int h(a,\mu)\mu(da)=1, \qquad \mu\in N\backslash\{0\},$$

于是由引理28得：

$$H(Y\backslash\{0\})=\iint 1_Y(T_{-a}\mu)h(a,T_{-a}\mu)L(da)H^0(d\mu),$$

由引理29得：

$$H(Y\backslash\{0\})=\int\frac{1}{\mu(0,\cdots,0)}\int_{\{a:\ \mu(S_{\|a\|}(a))=0\}} 1_Y(T_{-a}\mu)L(da)H^0(d\mu)$$

$$=\int\frac{1}{\mu(0,\cdots,0)}\int_{\{a:\ \mu(S_{\|a\|}(a))=0\}} 1_Y(T_a\mu)\ L(da)H^0(d\mu).$$

定理得证。

§7. Korolyuk定理

31. 定理 (Korolyuk) 设H是$(N,$**N**$)$上的平稳测度。记

$$A_n=[0,n^{-1})^m, \quad n=1,2,\cdots$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>0)=i_{H^*}.$$

其中H^*是对应于H的简单平稳测度，即H^*是在映象$\mu\frown\mu^*$之下由H所诱导的测度。

证明 对任意的$n>0$，总有

$$H(\mu:\ \mu(A_n)>0)=H(\mu:\ \mu^*(A_n)>0)$$
$$=H^*(\mu:\ \mu(A_n)>0),$$

因此无妨假定H是简单的。

如果对一切n都有$H(\mu:\ \mu(A_n)>0)=+\infty$,则有$i_n=+\infty$,此时定理中的结论 显然成立。因此无妨设存在$n_0$,使 $H(\mu:\ \mu(A_{n_0})>0)<+\infty$. 这时对任意有界集$A\in\mathscr{A}^m$, 必存在$t_1,\cdots t_j\in R^m$,使

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{j}(A_{n_0}+t_i),$$

从而由平稳性知

$$H(\mu:\ \mu(A)>0)\leqslant\sum_{i=1}^{j}H(\mu:\ \mu(A_{n_0}+t_i)>0)$$
$$=jH(\mu:\ \mu(A_{n_0})>0)<+\infty,$$

这说明$H((\cdot)\backslash\{0\})$是$\sigma$有限的。

由于H是简单的，由定理26知H^0也是简单的。应用定理30得

$$H(\mu:\ \mu(A_n)>0)=\int\int_{\{a:\ \mu(S_{\|a\|}(a))=0\}}1_{\{\mu:\ \mu(A_n)>0\}}(T_a\mu)L(da)H^0(d\mu)$$
$$=\int\int_{\{a:\ \mu(S_{\|a\|}(a))=0\}}1_{\{t:\ t\in R^m,\mu(A_n+t)>0\}}(a)L(da)H^0(d\mu)$$
$$=\int L(a:\ a\in R^m,\mu(A_n+a)>0,\mu(S_{\|a\|}(a))=0)H^0(d\mu)$$
$$=\int L(a:\ a\in R^m,\mu(A_n-a)>0,\mu(S_{\|a\|}(-a))=0)H^0(d\mu);$$

固定正整数j,令

$$Y_j=\{\mu:\ \mu\in N^0,\mu\in N_s,\ \mu(S_{\frac{1}{j}}(0,\cdots,0)\backslash\{0,\cdots,0\})=0\},$$

则得

$$\liminf_{n\to\infty}(n^mH(\mu:\ \mu(A_n)>0))$$
$$\geqslant\liminf_{n\to\infty}n^m\int_{Y_j}L(a:\ a\in R^m,\ \mu(A_n-a)>0,\ \mu(S_{\|a\|}(-a))=0)H_0(d\mu);$$

现在当$n>2\sqrt{m}\,j$时，如果$\mu\in Y_j$,则必有

$$A_n\subset\{a:\ a\in R^m,\mu(A_n-a)>0,\mu(S_{\|a\|}(-a))=0\},$$

所以

$$\liminf_{n\to\infty}(n^mH(\mu:\ \mu(A_n)>0))\geqslant\liminf_{n\to\infty}n^m\int_{Y_j}L(A_n)H^0(d\mu)$$
$$=\liminf_{n\to\infty}H^0(Y_j)=H^0(Y_j),\quad j=1,2,\cdots,$$

令$j\to\infty$，则得

$$\liminf_{n\to\infty} n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>0)\geqslant H^0(N^0)=i_H \tag{1}$$

另一方面，由H的平稳性可得

$$\begin{aligned} i_H L(A_n) &= H^0(N^0)L(A_n) \\ &= \int \mu(A_n)H(d\mu)\geqslant H(\mu:\ \mu(A_n)>0), \end{aligned}$$

且因为$L(A_n)=n^{-m}$，所以

$$n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>0)\leqslant i_H. \tag{2}$$

由(1)与(2)得

$$\lim_{n\to\infty} n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>0)=i_H.$$

定理证毕。

32. 定理 设H是$(N,\mathbf{N})$上的平稳测度，又 $i_H<\infty$，$A_n=[0,\frac{1}{n})^m$，$n=1,2,\cdots$，则下述命题等价：

1) H 是简单的；
2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^m H(\mu:\ \mu(A_n)=1)=i_H$；
3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>0)=i_H$；
4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>1)=0$。

证明 1)$\Longrightarrow$2) 当$H=H^*$时，只要在定理31的证明中以$\{\mu:\ \mu(A_n)=1\}$代替$\{\mu:\ \mu(A_n)>0\}$即可。

2)$\Longrightarrow$3) 由于

$$n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>0)\leqslant i_H,\quad n=1,2,\cdots.$$

3)$\Longrightarrow$4) 由于

$$\begin{aligned} H(\mu:\mu(A_n)>1) &= \sum_{j=2}^{\infty} H(\mu:\ \mu(A_n)=j) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} jH(\mu:\ \mu(A_n)=j)-\sum_{j=1}^{\infty} H(\mu:\ \mu(A_n)=j) \end{aligned}$$

从而

$$n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>1)\leqslant i_H - n^m H(\mu:\ \mu(A_n)>0).$$

4)$\Longrightarrow$1) 由于

$$\begin{aligned} 0=\lim_{n\to\infty} n^m H(\mu:\mu(A_n)>1) &\geqslant \lim_{n\to\infty} n^m H(\mu:(\mu-\mu^*)(A_n)>0) \\ &\geqslant H(\mu:(\mu-\mu^*)([0,\ 1)^m)>0), \end{aligned}$$

由此推知 $H(\mu:\ \mu\neq\mu^*)=0$。

§8. Palm 分 布

33. 定义 设 H 是 $(N, \mathbf{N})$ 上的平稳测度，满足条件：$0<i_H<\infty$。于是 $H((\cdot)\backslash\{0\})$ 是 σ 有限的。令

$$H_0 = i_H^{-1}H^0 = (H^0(N^0))^{-1}H^0,$$

称 H_0 为 H 的 palm 分布。

特别，当 $H = P\in\mathscr{P}_N$ 且 $0<i_P<\infty$ 时，记 P 的 palm 分布为 P_0。

34. 引理 设 $P\in\mathscr{P}_N$ 是平稳分布，$0<i_P<\infty$，$Y\in\overline{\mathbf{N}}$，$0\notin Y$。则 $P(Y)>0$ 当且仅当 $P_0(Y)>0$，而且在 $P(Y)>0$ 的条件下有

$$(P(\cdot|Y))_0 = P_0(\cdot|Y).$$

证明 因为 $Y\in\overline{\mathbf{N}}$，所以

$$P_0(Y) = i_P^{-1}P^0(Y) = i_P^{-1}\cdot\iint 1_{[0,1)^m}(t)1_Y(T_t\mu)\,\mu(dt)\,P(d\mu)$$

$$= i_P^{-1}\cdot\iint 1_{[0,1)^m}(t)1_Y(\mu)\mu(dt)P(d\mu) = i_P^{-1}\cdot\int_Y \mu([0,1)^m)\ P(d\mu);$$

所以 $P_0(Y)>0$ 等价于 $P(Y)>0$。又由定义得

$$(P(\cdot|Y))_0 = i_{P(\cdot|Y)}^{-1}(P(\cdot|Y))^0$$

$$= i_{P(\cdot|Y)}^{-1}\left(\frac{P(\cdot\cap Y)}{P(Y)}\right)^0 = i_{P(\cdot|Y)}^{-1}\cdot\frac{1}{P(Y)}P^0(\cdot\cap Y),$$

然而

$$i_{P(\cdot|Y)} = \frac{1}{P(Y)}\int_Y \mu([0,1)^m)\,P(d\mu) = \frac{P^0(Y)}{P(Y)},$$

所以最后得

$$(P(\cdot|Y))_0 = \left(\frac{P(Y)}{P^0(Y)}\right)\cdot\frac{P^0(\cdot\cap Y)}{P(Y)} = \frac{P^0(\cdot\cap Y)}{P^0(Y)}$$

$$= \frac{i_P^{-1}\cdot P_0(\cdot\cap Y)}{i_P^{-1}\cdot P^0(Y)} = \frac{P^0(\cdot\cap Y)}{P_0(Y)} = P_0(\cdot|Y).$$

引理得证。

35. 定理 设 P 是 $(N, \mathbf{N})$ 上的平稳分布，并且 $0<i_P<\infty$。则 P 是遍历的充分必要条件为：$P(0)=0$，并且对任意的 $Y\in\overline{\mathbf{N}}$，$0\notin Y$，$P_0(Y)$ 等于 0 或 1。

证明 如果 P 是遍历的，则由于 $\{0\}\in\overline{\mathbf{N}}$，故 $P(0)=0$ 或 1；但由条件 $0<i_P<\infty$ 知 $P(0)\neq 1$，所以只能有 $P(0)=0$。

现设 $Y\in\overline{\mathbf{N}}$，$0\notin Y$，$P(Y)=0$ 或 1。由引理 34，如果 $P(Y)=0$ 则 $P_0(Y)=0$；如果

$P(Y)=1$，则 $P_0(Y)=P(Y)=1$。

反之，如果 $Y\in\overline{\mathbf{N}}$，$0\notin Y$，$P(0)=0$。由引理34，当$P_0(Y)=0$则$P(Y)=0$；当$P_0(Y)=1$则 $P(Y)=1$，因此 P 遍历。

36．定义 设 H 是 $(N,\ \mathbf{N})$上的平稳测度，且 $H((\cdot)\backslash\{0\})$ 是 σ 有限的。令

$$Y_0=\{\mu:\ 不存在\ a_1,\ a_2\in R^m,\ 使\ a_1\neq a_2,\ \|a_1\|=\|a_2\|,\ \mu(a_1)>0,\ \mu(a_2)>0\},$$

由引理29，$H(N\backslash Y_0)=0$。

现设 $\mu\in Y_0$，于是存在唯一的 $t\in R^m$，满足：$\mu(t)>0$，且对一切适合 $\|a\|<\|t\|$ 的$a\in R^m$，都有 $\mu(a)=0$。记这个点为 $t(\mu)$。

37．引理 由 Y_0 到 R^m 的映象 $\mu\frown t(\mu)$ 关于 σ 代数 $Y_0\cap\mathbf{N}$ 及 $\mathscr{A}^m$ 是可测的。

证明 设 $A\in\mathscr{A}^m$，则

$$\{\mu:\ t(\mu)\in A\}=\bigcup_{0<r_1<r_2}\{\mu:\ \mu(a:\ \|a\|<r_1)=0,$$

$$\mu(a:\ r_1\leqslant\|a\|<r_2)=\mu((a:\ r_1\leqslant\|a\|<r_2)\cap A)=1\},$$

其中 r_1，r_2 跑遍一切非负有理数。证毕。

现对于 $A\in\mathscr{A}^m$，仍用 $A\mu$ 表示 μ 在 A 上的限制，于是 $\mu\frown T_{t(A\mu)}\mu$ 是 N 到自身的可测映象。

38．定理 设 H 是 $(N,\ \mathbf{N})$上的简单平稳测度，$0<i_H<\infty$。又设 $A_n=\left[0,\ \frac{1}{n}\right)^m$，$n=1,2,\cdots$。则当 $n\to\infty$时

$$\|H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)\,|\,\mu(A_n)>0)-H_0\|\to 0.$$

证明 由于

$$\|H_0-H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)\,|\,\mu(A_n)>0)\|$$

$$\leqslant\|H_0-i_H^{-1}n^mH(\mu:\ \mu(A_n)>0)\,H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)\,|\,\mu(A_n)>0)\|$$

$$+\|(i_H^{-1}n^mH(\mu:\ \mu(A_n)>0)-1)H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)\,|\,\mu(A_n)>0)\|,$$

由定理32，上式右边第 2 项当$n\to\infty$时趋于0。所以

$$\limsup_{n\to\infty}\|H_0-H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)\,|\,\mu(A_n)>0)\|$$

$$\leqslant i_H^{-1}\limsup_{n\to\infty}\|H^0-n^m\int_{\{\mu:\ \mu(A_n)>0\}}1_{(\cdot)}(T_{t(A_n\mu)}\mu)H(d\mu)\|$$

$$\leqslant 2i_H^{-1}\limsup_{n\to\infty}\sup_{Y\in\mathbf{N}^0}\left|H^0(Y)-n^m\int_{\{\mu:\ \mu(A_n)>0\}}1_Y(T_{t(A_n\mu)}\mu)H(d\mu)\right|$$

$$=2i_H^{-1}\limsup_{n\to\infty}\sup_{Y\in\mathbf{N}^0}\left|n^m\iint_{A_n}1_Y(T_a\mu)\mu(da)H(d\mu)\right.$$

$$\left.-n^m\int_{\{\mu:\ \mu(A_n)>0\}}1_Y(T_{t(A_n\mu)}\mu)H(d\mu)\right|$$

$$\leqslant 2i_H^{-1}\limsup_{n\to\infty} n^m\int_{\{\mu:\ \mu(A_n)>0\}}(\mu(A_n)-1)H(d\mu)$$

$$=2i_H^{-1}\limsup_{n\to\infty}(i_H-n^mH(\mu:\ \mu(A_n)>0))=0.$$

39．定理 在定理38的假定之下，有

$$H(\cdot|\mu(A_n)>0)\overset{w}{\Longrightarrow}H_0.$$

证明 设h是$(N,\ \rho_N)$上的任意有界连续函数。由定理38得

$$\lim_{n\to\infty}\int h(T_{t(A_n\mu)}\mu)H(d\mu|\mu(A_n)>0)=\int h(\mu)H_0(d\mu),$$

于是

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int h(\mu)H(d\mu|\mu(A_n)>0)-\int h(\mu)H_0(d\mu)\right|$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\int\left|h(\mu)-h(T_{t(A_n\mu)}\mu)\right|H(d\mu|\mu(A_n)>0)$$

$$+\limsup_{n\to\infty}\left|\int h(T_{t(A_n\mu)}\mu)H(d\mu|\mu A_n)>0)-\int h(\mu)H_0(d\mu)\right|$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\int\sup_{\|t\|<\sqrt{m}/n}|h(T_t\mu)-h(\mu)|H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in d\mu|\mu(A_n)>0)$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\int\sup_{\|t\|<\sqrt{m}/n}|h(T_t\mu)-h(\mu)|H_0(d\mu).$$

最后的不等号再次用到定理38。因为当$n\to\infty$时

$$\sup_{\|t\|<\sqrt{m}/n}|h(T_t\mu)-h(\mu)|\to 0,$$

所以由上面的不等式推知：

$$\lim_{n\to\infty}\int h(\mu)H(d\mu|\mu(A_n)>0)=\int h(\mu)H_0(d\mu).$$

40． 上面的定理38及定理39是对简单平稳测度而言的。当H是平稳而非简单时，上述结论必须作些改变。

设H平稳，$0<i_H<\infty$，又设H^*是与之对应的简单平稳测度。对于$Y\in\mathbf{N}^0$，令

$$H_A(Y)=i_{H^*}^{-1}\iint 1_{(0,1)^m}(a)1_Y(T_a\mu)\mu^*(da)H(d\mu),$$

这是$\mathbf{N}^0$上的分布。对于$j\geqslant 1$有

$$H_A(\mu:\ \mu\in Y,\ \mu(0,\cdots,0)=j)$$

$$=i_{H^*}^{-1}\iint 1_{(0,1)^m}(a)1_{\{\mu:\ \mu\in Y,\mu(0,\cdots,0)=j\}}(T_a\mu)\mu^*(da)H(d\mu)$$

$$=i_{H^*}^{-1}\int\frac{1}{j}\int 1_{(0,1)^m}(a)1_{\{\mu:\ \mu\in Y,\mu(0,\cdots,0)=j\}}(T_a\mu)\mu(da)H(d\mu)$$

$$=\left(i_{H^*}^{-1}\cdot i_H\cdot\frac{1}{j}\right)$$

$$\times\left(i_{H^*}^{-1}\iint 1_{[0,1)^m}(a)1_{\{\mu:\ \mu\in Y,\mu(0,\cdots,0)=j\}}(T_a\mu)\mu(da)H(d\mu)\right)$$

$$=\left(i_{H^*}^{-1}\cdot i_H\cdot\frac{1}{j}\right)H_0(\mu:\ \mu\in Y,\mu(0,\cdots,0)=j),$$

于是就有

$$H_\Delta(Y)=i_{H^*}^{-1}\cdot i_H\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}H_0(\mu:\ \mu\in Y,\ \mu(0,\cdots,0)=j)$$

特别得

$$i_{H^*}=i_H\sum_{j=1}^{\infty}H_0(\mu:\ \mu(0,\cdots,0)=j)/j,$$

这时定理38及39可相应地作如下改动。

41. 定理 设H是平稳测度，$0<i_H<\infty$，又设$A_n=[0,\frac{1}{n})^m$, $n=1,2,\cdots$。则当$n\to\infty$时，有

$$\|H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)|\mu(A_n)>0)-H_\Delta\|\to 0,$$

以及

$$H(\cdot|\mu(A_n)>0)\overset{w}{\Longrightarrow}H_\Delta.$$

然而这个结果可以更进一步，也就是

42. 定理 在定理41的假定之下，如果

$$H_0(\mu,\ \mu(0,\cdots,0)=j)>0$$

则当$n\to\infty$时

$$\|H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)|\mu(A_n)=j)-H_0(\cdot|\mu(0,\cdots,0)=j\|\to 0.$$

证明 由于

$$\frac{H(\mu:\ \mu(A_n)=j)}{H(\mu:\ \mu(A_n)>0)}=H(\mu(A_n)=j|\mu(A_n)>0)$$

$$=H((T_{t(A_n\mu)}\mu)(0,\cdots,0)=j|\mu(A_n)>0),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(\mu:\ \mu(A_n)=j)}{H(\mu:\ \mu(A_n)>0)}=i_{H^*}^{-1}\cdot i_H\cdot\frac{1}{j}H_0(\mu:\ \mu(0,\cdots,0)=j),$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\|H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)|\mu(A_n)=j)-H_0(\cdot|\mu(0,\cdots,0)=j)\|$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\|H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot),\mu(A_n)=j|\mu(A_n)>0)$$

$$\times\frac{H(\mu:\ \mu(A_n)>0)}{H(\mu:\ \mu(A_n)=j)}-\frac{H_0(\mu:\ \mu\in(\cdot),\mu(0,\cdots,0)=j)}{H_0(\mu:\ \mu(0,\cdots,0)=j)}\|$$

$$\leqslant\frac{ji_{H^*}}{i_HH_0(\mu:\ \mu(0,\cdots,0)=j)}\limsup_{n\to\infty}\|H(T_{t(A_n\mu)}\mu\in(\cdot)|\mu(A_n)>0)$$

$$-H_\Delta\|=0.$$

§9. 样本强度

43. 记号 设$Y\in\mathbf{N}^0$，令

$$\mu^Y=\sum_{a\in R^m, T_a\mu\in Y}\mu(a)\delta_a,\quad \mu\in N,$$

则对任意的$A\in\mathscr{A}^m$有

$$\mu^Y(A)=\int 1_A(a)1_Y(T_a\mu)\mu(da).$$

由简单的计算可知：对任意的$a\in R^m$，

$$(T_a\mu)^Y=T_a(\mu^Y).$$

容易证明映像$\mu\frown\mu^Y$是可测的。因而对于$(N,\ \mathbf{N})$上的任意测度H，通过上述映像可在$(N,\ \mathbf{N})$上诱导出另一测度，记为H^Y。如果H是平稳的，则对任意的$Z\in\mathbf{N}$，任意的$a\in R^m$，

$$H^Y(T_a\mu\in Z)=H(\mu;\ T_a(\mu^Y)\in Z)$$

$$=H(\mu;\ (T_a\mu)^Y\in Z)=HT_a^{-1}(\mu;\ \mu^Y\in Z)=H(\mu;\ \mu^Y\in Z)=H^Y(Z),$$

所以H^Y也是平稳的。

如果$P\in\mathscr{P}_N$是平稳分布，则样本强度$S(\mu)$对于P^Y几乎处处存在，因而$S(\mu^Y)$相对于P几乎处处存在。应用推论25，令

$$f(a,\ \mu)=1_{[0,1)^m}(a)1_Y(\mu)$$

得

$$i_{P^Y}=\iint 1_{[0,1)^m}(a)\mu(da)P^Y(d\mu)$$

$$=\iint 1_{[0,1)^m}(a)1_Y(T_a\mu)\mu(da)P(d\mu)$$

$$=\iint 1_{[0,1)^m}(a)1_Y(\mu)L\times P^0(da\times d\mu)=P^0(Y),$$

因此得

$$\int S(\mu^Y)P(d\mu)=\int S(\mu)P^Y(d\mu)=i_{P^Y}=P^0(Y),$$

因而相对于P几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\mu^Y([-n,n)^m)=S(\mu^Y).$$

如果P是平稳分布且$P(0)=0$，则$S(\mu)>0,(a.e.P)$(见引理16)，而当$i_P<\infty$时，$P(S(\mu)<\infty)=1$。在这些条件之下，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu^Y([-n,n)^m)}{\mu([-n,n)^m)}=\frac{S(\mu^Y)}{S(\mu)}.$$

44. 定理 设P是遍历的平稳分布，$0<i_P<\infty$，又设$Y\in\mathbf{N}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu^Y([-n,n)^m)}{\mu([-n,n)^m)}=P_0(Y).$$

证明　由于$\{0\}\in\overline{\mathbf{N}}$，所以$P(0)=0$或1。但由$0<i_P<\infty$的假设可推知$P(0)\neq 1$，故$P(0)=0$。从而由引理16

$$P(\mu\colon 0<S(\mu)<+\infty)=1.$$

因为$S(\mu^Y)$是$\overline{\mathbf{N}}$可测的，且由于P是遍历的，故知

$$S(\mu^Y)=\int S(\mu^Y)P(d\mu)=P^0(Y),\qquad (a.e.P),$$

仍由P的遍历性可知

$$S(\mu)=i_P,\qquad (a.e.P),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu^Y([-n,n)^m)}{\mu([-n,n)^m)}=\frac{P^0(Y)}{i_P}=P_0(Y),\qquad (a.e.P).$$

定理44要求P是平稳且遍历的。当P只是平稳分布而非遍历时，结论如何？下面讨论这个问题。

我们仍设$P(0)=0$，$0<i_P<\infty$。因为在这些条件之下有

$$P(\mu\colon 0<S(\mu)<\infty)=1.$$

我们令

$$P_*(Y)=\int\frac{S(\mu^Y)}{S(\mu)}P(d\mu),\quad Y\in\mathbf{N}^0,$$

并称P_*为拟Palm分布。

45. 定理　设P是平稳分布，$0<i_P<\infty$，$P(0)=0$。则P_*是$\mathbf{N}^0$上的分布并且

$$P_0(Y)=\int_Y\frac{S(\mu)}{i_P}P_*(d\mu),\quad Y\in\mathbf{N}^0.$$

或者

$$P^0(Y)=\int_Y S(\mu)P_*(d\mu),\quad Y\in\mathbf{N}^0.$$

证明　1. 首先设$Y_n, n=1,2,\cdots$，是$\mathbf{N}^0$中互不相交的集列，$Y=\bigcup_n Y_n$。由于$S(\mu^Y)\leqslant S(\mu)$故由

$$\int S(\mu^Y)P(d\mu)=P^0(Y)=\sum_{n=1}^{\infty}P^0(Y_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int S(\mu^{Y_n})P(d\mu)=\int\sum_{n=1}^{\infty}S(\mu^{Y_n})P(d\mu),$$

可推知

$$S(\mu^Y)=\sum_{n=1}^{\infty}S(\mu^{Y_n}),\quad (a.e.P).$$

于是

$$P_*(Y)=\int\frac{S(\mu^Y)}{S(\mu)}P(d\mu)=\int\sum_{n=1}^{\infty}S(\mu^{Y_n})/S(\mu)P(d\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}P_*(Y_n),$$

这说明P_*具有可列可加性。又显然$P_*(N^0)=1$，故P_*是$\mathbf{N}^0$上的分布。

2. 现设$Y\in\mathbf{N}^0$任意。令

$$Y_n = Y\cap\{\mu:\ \mu\in N,\ n^{-1}\leqslant S(\mu)<n\},\qquad n=1,2,\cdots.$$

将区间$[\frac{1}{n},n)$分成k份，每份长$\frac{1}{k}(n-\frac{1}{n})=\varepsilon$。令

$$A_j=[\frac{1}{n}+(j-1)\varepsilon,\ \ \frac{1}{n}+j\varepsilon),\quad j=1,2,\cdots k,$$

又令

$$Z_j=\{\mu:\ S(\mu)\in A_j\},\quad j=1,2,\cdots,k,$$

则有

$$\left|\ P^0(Y_n)-\int_{Y_n}S(\mu)P_*(d\mu)\ \right|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{k}\left|\ P^0(Y_n\cap Z_j)-\int_{Y_n\cap Z_j}S(\mu)P_*(d\mu)\ \right|$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{k}\left|\ P^0(Y_n\cap Z_j)-(\frac{1}{n}+(j-1)\varepsilon)P_*(Y_n\cap Z_j)\ \right|+\sum_{j=1}^{k}\varepsilon P_*(Y_n\cap Z_j)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{k}\left|\int_{Z_j}S(\mu^{Y_n})P(d\mu)\ -\int_{Z_j}(\frac{1}{n}+(j-1)\varepsilon)\frac{S(\mu^{Y_n})}{S(\mu)}P(d\mu)\ \right|+\varepsilon$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{k}\int_{Z_j}S(\mu^{Y_n})\ \left(1-\frac{1/n+(j-1)\varepsilon}{1/n+j\varepsilon}\right)P(d\mu)+\varepsilon$$

$$\leqslant n\max_{1\leqslant j\leqslant k}\ (1-\frac{1+n(j-1)\varepsilon}{1+nj\varepsilon})+\varepsilon\leqslant n^2\varepsilon+\varepsilon=(n^2+1)\varepsilon=\frac{1}{k}\ \ \frac{n^4-1}{n},$$

对任一固定的n，令$k\to+\infty$可得

$$P^0(Y_n)=\int_{Y_n}S(\mu)P_*(d\mu),$$

注意到$Y_n\uparrow Y$，令$n\to\infty$便得

$$P^0(Y)=\int_{Y}S(\mu)P_*(d\mu).$$

46. 定理 设P是平稳分布，$P(0)=0$，$0<i_P<\infty$，则对任意的$Y\in\mathbf{N}$，有

$$P(Y)=\lim_{n\to\infty}\ (2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P_*(T_a\mu\in Y)L(da).$$

证明 1. 首先设$Y\in\overline{\mathbf{N}}$。由于从$\mu(a)>0$可推出$(T_a(\mu)(0,\cdots,0)>0$，于是当$\mu\in Y$时有

$$\mu^{Y\cap N^0}=\sum_{a\in R^m,T_a\mu\in Y\cap N^0}\mu(a)\delta_a=\mu$$

而当$\mu\notin Y$时，$T_a\mu\notin Y$，故

$$S(\mu^{Y\cap N^0})=1_Y(\mu)S(\mu),\quad (a.e.P)\ ,$$

由于$0<S(\mu)<\infty(a.e.P)$故

$$\frac{S(\mu^{Y\Delta N^0})}{S(\mu)}=1_Y(\mu),\qquad(a.e.P),$$

因此由P_*的定义知

$$P_*(Y)=\int\frac{S(\mu^{YUN^0})}{S(\mu)}P(d\mu)=\int 1_Y(\mu)P(d\mu)=P(Y),$$

因此对于任意的$\overline{\mathbf{N}}$可测的非负函数f都有

$$\int f(\mu)P_*(d\mu)=\int f(\mu)P(d\mu).$$

2. 现设$Y\in\mathbf{N}$任意。由于

$$\begin{aligned}&(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P_*(T_a\mu\in Y)L(da)\\&=(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\left(\int 1_Y(T_a\mu)P_*(d\mu)\right)L(da)\\&=\int\{(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}1_Y(T_a\mu)L(da)\}P_*(d\mu),\end{aligned}$$

因为$1_Y^*(\mu)$是不变的，故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P_*(T_a\mu\in Y)(Lda)\\&=\int 1_Y^*(\mu)P_*(d\mu)=\int 1_Y(\mu)P(d\mu)=P(Y).\end{aligned}$$

§10. 一维情形：Palm-Khinchin理论

47. 考虑$m=1$的特殊情况，这时$X=(-\infty,+\infty)$。对于每一个$\mu\in N$，相应的简单计数测度μ^*对应于下面的有序点列：

$$(\cdots,t_{-2}(\mu^*),\ t_{-1}(\mu^*),\ t_0(\mu^*),\ t_1(\mu^*),\cdots),$$

$$\cdots<t_{-2}(\mu^*)<t_{-1}(\mu^*)\leqslant 0<t_0(\mu^*)<t_1(\mu^*)<\cdots,$$

于是集合

$$\{a:a\in R,\ \mu^*(S_{|a|}(a))=0\},\quad \mu\in N^0$$

与区间

$$[t_{-2}(\mu^*)/2,\quad t_0(\mu^*)/2]$$

是重合的。此外，当$\mu^*((-\infty,0))=0$时约定$t_{-2}(\mu^*)=-\infty$；而当$\mu^*((0,\infty))=0$时约定$t_0(\mu^*)=\infty$。

由定理30知，当H是$\mathbf{N}$上的平稳测度，而$H((\cdot)\setminus\{0\})\sigma$有限时，对任意的$Y\in\mathbf{N}$有

$$H(Y\setminus\{0\})=\int\frac{1}{\mu(0)}\int_{t_{-2}(\mu^*)/2}^{t_0(\mu^*)/2}1_Y(T_a\mu)L(da)H^0(d\mu).$$

48. **引理** 设H是$\mathbf{N}$上的平稳测度，则当$H((\cdot)\setminus\{0\})\sigma$有限时，对任意$Y\in\mathbf{N}$有

$$H(\mu:\ \mu\in Y,\ \mu((-\infty,\ 0])>0)=\int\frac{1}{\mu(0)}\int_0^{t_0(\mu^*)}1_Y(T_t\mu)\,L(dt)\,H^0(d\mu)$$

证明 令 $Z=(\mu:\ \mu((-\infty,\ 0]>0))$ 及

$$h(a,\ \mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu(a)}, & 当\ a=t_{-1}(\mu^*),\\ 0, & 其余.\end{cases}$$

则

$$\sum_{a\in R,\ \mu(a)>0}h(a,\ \mu)\mu(a)=1,\qquad \mu\in Z,$$

于是由引理28得

$$H(Y\cap Z)=\iint_{(-\infty,0]\times N^0}h(a,\ T_{-a}\mu)\,1_Y(T_{-a}\mu)\,L\times H^0(da\times d\mu)$$

$$=\iint_{-\infty}^0 h(a,\ T_{-a}\mu)\,1_Y(T_{-a}\mu)\,L(da)\,H^0(d\mu),$$

但由 h 的定义知

$$h(a,\ T_{-a}\mu)=\begin{cases}(T_{-a}\mu(a))^{-1}, & 当\ a=t_{-1}(T_{-a}\mu^*),\\ 0, & 其余.\end{cases}$$

或者

$$h(a,\ T_{-a}\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu(0)}, & 当\ -t_0(\mu^*)<a\leqslant 0,\\ 0, & 其余,\end{cases}$$

于是得

$$H(Y\cap Z)=\int\frac{1}{\mu(0)}\int_0^{t_0(\mu^*)}1_Y(T_a\mu)\,L(da)\,H^0(d\mu).$$

引理获证.

49. 引理 设 H 是平稳测度，且 $H((\cdot)\backslash\{0\})$ 是 σ 有限的，则

$$H(\mu:\ \mu(-t,0])>0)=\int\frac{1}{\mu(0)}\min(t,\ t_0(\mu^*))H^0(d\mu).$$

证明 在引理48中令

$$Y=\{\mu:\ \mu((-t,\ 0])>0\},$$

则

$$H(\mu:\ \mu((-t,\ 0])>0)=\int\frac{1}{\mu(0)}\int_0^{t_0(\mu^*)}1_Y(T_a\mu)\,L(da)\,H^0(d\mu)$$

$$=\int\frac{1}{\mu(0)}\min(t,\ t_0(\mu^*))\,H^0(d\mu).$$

下面的定理中所述的公式称为 Palm-Khinchin 公式.

50. 定理 设 H 是简单的平稳测度，$H((\cdot)\backslash\{0\})$ 是 σ 有限的. 则对一切 $t\geqslant 0$ 及一切非负整数 j 有

$$H(\mu:\mu((0,\ t])>j)=\int_0^t H^0(\mu:\mu((0,\ a])=j)L(da).$$

证明 设$t>0$，$j\geqslant 0$，令

$$Z=\{(a,\ \mu):0<a\leqslant t,\ \mu((a,\ t])=j\},$$
$$Y=\{\mu:\mu\in N_S,\ \mu((0,\ t])>j\},$$
$$h(a,\ \mu)=1_Z(a,\ \mu),$$

则

$$\int h(a,\ \mu)\,\mu(da)=1,\qquad \mu\in Y,$$

由于H是简单的，知$H(\mu:\mu((0,\ t])>j)=H(Y)$；再由第四章之引理2得：

$$H(Y)=\int h(a,\ \mu)\,1_Y(\mu)\mathscr{C}_H(da\times d\mu)=\int h(a,\ \mu)\mathscr{C}_H(da\times d\mu)$$
$$=\int h(a,\ T_{-a}\mu)\,T\mathscr{C}_H(da\times d\mu)$$
$$=\iint 1_{((a,\mu):\,0<a<t,\,\mu((0,t-a])=j)}(a,\ \mu)L\times H^0(da\times d\mu),$$
$$=\int_0^t H^0(\mu:\mu((0,\ t-a])=j)L(da).$$

下面我们继续讨论简单平稳测度。本节余下的部分恒设H是简单平稳测度，满足

$$0<i_H<\infty.$$

令

$$F_H(a)=H_0(\mu:t_0(\mu)\leqslant a),\qquad 0\leqslant a\leqslant\infty.$$

51．引理 设H是简单平稳测度，$H((\cdot)\backslash\{0\})$是$\sigma$有限的。则对任意$Y\in\mathbf{N}$有

$$H(\mu:\mu\in Y,\ \mu((-\infty,\ 0])>0)=\int_0^\infty H^0(\mu:t_0(\mu)>a,T_a\mu\in Y)\,L(da).$$

证明 由引理48，得

$$H(\mu:\mu\in Y,\ \mu((-\infty,\ 0])>0)=\iint_0^{t_0(\mu)} 1_Y(T_a\mu)\,L(da)\,H^0(d\mu)$$
$$=\iint 1_{[0,t_0(\mu))}(a)1_Y(T_a\mu)\,L(da)\,H^0(d\mu)$$
$$=\int_0^\infty H^0(\mu:a<t_0(\mu),\ T_a\mu\in Y)\,L(da).$$

52．定理 设H是简单平稳测度，$0<i_H<\infty$，则对任意a，$b\geqslant 0$有

$$H(\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a\ \ t_0(\mu)\leqslant b)\ =i_H\Big(\int_0^a+\int_0^b-\int_0^{a+b}\Big)(1-F_H(t))dt$$

证明 令

$$Y=\{\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a,\ t_0(\mu)\leqslant b\},$$

由引理51得

$$H\ (Y)=i_H\int_0^\infty H_0(\mu:t<t_0(\mu),T_t\mu\in Y)L(dt),$$

当$t>a$时，$-t_{-1}(T_t\mu)>a$，而当$t\leqslant a$时，

$$\{\mu:\ t<t_0(\mu),T_t\mu\in Y\}=\{\mu:\ t<t_0(\mu)\leqslant t+b\},$$

所以

$$H(Y)=i_H\int_0^a H_0(\mu:\ t<t_0(\mu)\leqslant t+b)L(dt)$$

$$=i_H\int_0^a (F_H(b+t)-F_H(t))L(dt)$$

$$=i_H\left(\int_0^a+\int_0^b-\int_0^{a+b}\right)(1-F_H(t))L(dt).$$

53. 定理 在定理52的假定之下，有

$$H(\mu:\ t_0(\mu)\leqslant a)=i_H\int_0^a(1-F_H(t))L(dt),$$

以及

$$H(\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a)=i_H\int_0^a(1-F_H(t))L(dt).$$

证明 令

$$Y=\{\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a\}$$

则当$t>a$时，$-t_{-1}(\mu)>a$，而当$0\leqslant t\leqslant a$时，

$$\{\mu:\ t_0(\mu)>t, T_t\mu\in Y\}=\{\mu:\ t_0(\mu)>t\}$$

从而由引理51得

$$H(Y)=i_H\int_0^\infty H_0(\mu:\ t_0(\mu)>t, T_t\mu\in Y)L(dt)$$

$$=i_H\int_0^a H_0(\mu:\ t<t_0(\mu))L(dt)\ =\ i_H\int_0^a(1-F_H(t)L(dt)\ .$$

此外，由于$H(\mu:\ t_0(\mu)\leqslant t)=H(\mu:\ \mu((0,t])>0)$，由平稳性推得

$$H(\mu:\ \mu((0,t])>0)=H(\mu:\ \mu([0,t])>0)$$

$$=H(\mu:\ \mu([-t,0])>0)=H(\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant t).$$

54. 推论 令

$$c=1-H_0(\mu:\ t_0(\mu)<\infty).$$

则对任意的$a\geqslant 0$有

$$H(\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a, t_0(\mu)<\infty)=i_H\int_0^a(1-F_H(t))L(dt)-c\cdot i_H\cdot a.$$

和

$$H(\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a,\ t_0(\mu)=\infty)=c\cdot i_H\cdot a.$$

证明 由定理52知

$$H(\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a, t_0(\mu)<\infty)$$

$$=\lim_{b\to\infty}H(\mu:\ -t_{-1}(\mu)\leqslant a, t_0(\mu)\leqslant b)$$

$$=i_H\int_0^a(1-F_H(t))L(dt)-\lim_{b\to\infty}i_H\int_b^{a+b}(1-F_H(t))L(dt)$$

$$=i_H\int_0^a(1-F_H(t))L(dt)-c\cdot i_H\cdot a\ .$$

55. 推论 在定理53的假定之下，有

$$H(\mu:\ t_0(\mu)-t_{-1}(\mu)\leqslant b)=\int_{0^+}^b i_H tF_H(dt).$$

证明 由定理53得

$$H(\mu:\ a<-t_{-1}(\mu)\leqslant a+da, b<t_0(\mu)-t_{-1}(\mu)\leqslant b+db)$$
$$=1_{\{0<a<b\}}\ i_H(F_H(b+db)-F_H(b))L(da)$$
$$=1_{\{0<a<b\}}\ i_H(F_H(db)L(da),$$

其中$F_H(db)=F_H(b+db)-F_H(b)=H_0(\mu:\ b<t_0(\mu)\leqslant b+db)$，从而

$$H(\mu:\ t_0(\mu)-t_{-1}(\mu)\leqslant b)$$
$$=\int_{0+}^{b} i_H F_H(dt)\int_0^\infty 1_{\{0<\tau<t\}}L(d\tau)=\int_{0+}^{b} i_H t F_H(dt).$$

§11. 平稳无穷可分点过程

56. 仍然考虑$X=R^m$的情形。

仍以$\mathscr{P}_{IN}$记全体无穷可分分布。如果$P\in\mathscr{P}_{IN}$，它的典则测度是$\tilde{P}=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$；$E_n\in\mathscr{E}_+$，$n=1,2,\cdots$。对于任意$t\in R^m$，$Y\in\mathbf{N}$有

$$P(\mu:\ T_t\mu\in Y)=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_n}(\mu:\ T_t\mu\in Y)$$
$$=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_n(\mu:\ T_t\mu\in(\cdot))}(Y)=\mathscr{U}_{\tilde{P}(\mu:\ T_t\mu\in(\cdot))}(Y),$$

即有

$$\widetilde{P(\mu:\ T_t\mu\in(\cdot))}=\tilde{P}(\mu:\ T_t\mu\in(\cdot)),$$

所以P是平稳的当且仅当$\tilde{P}$是平稳的。

如果P是平稳无穷可分分布，则

$$i_P=i_{\tilde{P}}.$$

57. 引理 设$E\in\mathscr{E}_+$且E是平稳的，则

$$E(\mu:\ 0<\mu(R^m)<\infty)=0.$$

证明 对于正整数j有

$$\{\mu:\ \mu(R^m)=j\}\in\overline{\mathbf{N}},$$

又设S_n是以$(0,\cdots,0)$为中心，以n为半径的开球。则对任意$t\in R^m$，$0<i\leqslant j<\infty$有

$$E(\mu:\ \mu(S_n+t)=i,\ \mu(R^m)=j)=E(\mu:\ \mu(S_n)=i,\ \mu(R^m)=j),$$

然而容易看出

$$\lim_{\|t\|\to\infty}E(\mu:\ \mu(S_n+t)=i,\ \mu(R^m)=j)=0,$$

所以对一切n有

$$E(\mu:\ \mu(S_n)=i,\ \mu(R^m)=j)=0,$$

因此

$$E(\mu:\ \mu(R^m)=j)=\lim_{n\to\infty}E(\mu:\ \mu(S_n)=j,\mu(R^m)=j)=0,$$

从而

$$E(\mu:\ 0<\mu(R^m)<\infty)=0.$$

58. 推论 设$E\in\mathscr{E}_+$,平稳且$E(0)=0$,则$\mathscr{U}_E$是奇异无穷可分分布。

证明 由上面的引理知

$$(\widetilde{\mathscr{U}}_E)(\mu:\ 0<\mu(R^m)<\infty)=E(\mu:\ 0<\mu(R^m)<\infty)=0.$$

59. 在定义Ⅱ.64中，我们已将任意的无穷可分分布分解为：

$$P=P_r*P_s,$$

其中P_r是P的正则部分，P_s是P的奇异部分。

现在我们要对R^m上的平稳无穷可分分布作进一步的分解。首先注意，由于

$$\{\mu:\ \mu(R^m)=\infty\}\in\overline{\mathbf{N}},$$

$$\{\mu:\ \mu(R^m)<\infty\}\in\overline{\mathbf{N}},$$

所以当P平稳时，

$$\tilde{P}_r(\cdot)=\tilde{P}(\mu:\ \mu(R^m)<\infty,\mu\in(\cdot)),$$

$$\tilde{P}_s(\cdot)=\tilde{P}(\mu:\ \mu(R^m)=\infty,\mu\in(\cdot)),$$

都是平稳的。

60. 定义 令

$$h(\cdot)=1_{\{\mu:\ \mu((0,1]^m)>0\}}(\cdot),$$

如果$P\in\mathscr{P}_{IN}$,则$\tilde{P}\in\mathscr{E}_{\text{Lus}}$,于是

$$\int h(\mu)\tilde{P}(d\mu)=\tilde{P}(\mu:\ \mu((0,1]^m)>0)<\infty,$$

又如果P是平稳的，则h^*相对于$\tilde{P}$几乎处处存在。

现设P是平稳无穷可分分布，如果

$$h^*(\mu)>0,\ (a.e.\tilde{P}),$$

则称P是强奇无穷可分的。

如果P是奇异的平稳无穷可分分布，而且

$$\tilde{P}h^*(\mu)=0,\quad (a.e.)$$

则称P是弱奇无穷可分的。

下面的两个定理刻划了强奇异无穷可分分布和弱奇异无穷可分分布。

61. 定理 设P是平稳无穷可分分布，则P是强奇异无穷可分分布，当且仅当存在至多可列个平稳的$E_n\in\mathscr{E}_+$，$E(0)=0$，$n=1,2,\cdots$,使得

$$P=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_n}.$$

证明 *必要性* 假定$h^*(\mu)>0,(a.e.\tilde{P})$,令

$$Y_1=\{\mu:\ h^*(\mu)\geqslant 1\},$$

$$Y_n=\{\mu:\ \frac{1}{n}\leqslant h^*(\mu)<\frac{1}{n-1}\},\quad n=2,3,\cdots.$$

由h^*的不变性可知 $Y_n\in\overline{\mathbf{N}}$，$n=1,2,\cdots$.又

$$\tilde{P}(\cdot)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{P}((\cdot)\cap Y_n),$$

令$E_n(\cdot)=\tilde{P}((\cdot)\cap Y_n)$，$n=1,2,\cdots$,则显然每一$E_n$都是平稳的。并且

$$\frac{1}{n}E_n(N)\leqslant\int h^*(\mu)\tilde{P}(d\mu)\leqslant\int h(\mu)\tilde{P}(d\mu)<\infty,$$

$$E_n(0)=0,\qquad n=1,2,\cdots,$$

即

$$E_n\in\mathscr{E}_+,\quad n=1,2,\cdots$$

于是

$$P=\mathscr{U}_{\tilde{P}}=\mathscr{U}_{\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n}=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_n}.$$

充分性 如果

$$P=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}P_n,\ P_n\text{平稳且}\tilde{P}_n\in\mathscr{E}_+,\quad n=1,2,\cdots,$$

则

$$\tilde{P}_n(\mu:\ \mu((0,1]^m)>0,\quad h^*(\mu)=0)$$

$$=\int 1_{(\mu:h^*(\mu)=0)}(\mu)h(\mu)\tilde{P}_n(d\mu)=\int 1_{(\mu:h^*(\mu)=0)}(\mu)h^*(\mu)\tilde{P}_n(d\mu)=0,$$

于是由$\tilde{P}_n$的平稳性及h^*的不变性推知

$$\tilde{P}_n(\mu:\ \mu\neq 0,\ h^*(\mu)=0)=0,$$

从而

$$\tilde{P}_n(\mu:\ h^*(\mu)=0)=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

于是

$$\tilde{P}(\mu:\ h^*(\mu)=0)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{P}_n(\mu:\ h^*(\mu)=0)=0,$$

所以$h^*>0$，$(a.e.\tilde{P})$.

62．定理 设P是平稳的奇异无穷可分分布，则P是弱奇异的，当且仅当P不可以表为如下形式：

$$P=P_1*P_2,$$

其中P_1，P_2都是平稳无穷可分分布，而P_2满足条件：$0<\tilde{P}_2(N)<\infty$.

证明 设P不是弱奇异的无穷可分分布，则

$$\tilde{P}(\mu:\ h^*(\mu)>0)>0,$$

从而存在常数$c>0$使

$$\tilde{P}(\mu:\ h^*(\mu)\geqslant c)>0,$$

于是

$$\tilde{P}(\cdot)=\tilde{P}(\mu:\ \mu\epsilon(\cdot),\ h^*(\mu)<c)+\tilde{P}(\mu:\ \mu\epsilon(\cdot),\ h^*(\mu)\geqslant c)$$

$$P=P_1*P_2\ .$$

其中

$$P_1=\mathscr{U}_{\tilde{P}(\mu:\ \mu\epsilon(\cdot),h^*(\mu)<c)},$$

$$P_2=\mathscr{U}_{\tilde{P}(\mu:\ \mu\epsilon(\cdot),h^*(\mu)\geqslant c)},$$

$$0<\tilde{P}_2(N)<+\infty.$$

反之，如果存在分布P_1，P_2，使$P=P_1*P_2$而P_1，P_2平稳无穷可分且$0<\tilde{P}_2(N)<\infty$。则P_2是强奇异的平稳无穷可分分布，从而

$$\tilde{P}(\mu:\ h^*(\mu)>0)\geqslant\tilde{P}_2(\mu:\ h^*(\mu)>0)>0,$$

于是知P不是弱奇异无穷可分分布。

63. 由前述，可知：对于任意的平稳奇异无穷可分分布P_s，总可以表为：

$$P_s=P_{s,1}*P_{s,2}\ ,$$

其中$P_{s,1}$是弱奇异的，而$P_{s,2}$是强奇异的，并且

$$\tilde{P}_{s,1}(\cdot)=\tilde{P}(\mu:\ \mu\epsilon(\cdot),\ \mu(R^m)=\infty,\ h^*(\mu)=0),$$

$$\tilde{P}_{s,2}(\cdot)=\tilde{P}(\mu:\ \mu\epsilon(\cdot),\ h^*(\mu)>0).$$

所以，任意的平稳无穷可分分布P都可以表为如下形式：

$$P=P_r*P_{s,1}*P_{s,2}\ .$$

§12 平稳无穷可分点过程的遍历定理

64. 定理 设P是平稳无穷可分分布，则下述诸命题等价：

1） P是遍历的；

2） P不可以表为形式：$P=P_1*P_2$，其中P_1与P_2都是平稳无穷可分分布，而$0<\tilde{P}_2(N)<\infty$；

3） $P_{s,2}=\delta_0$；

4） 对任意的$Y\epsilon\overline{\mathbf{N}}$，有$\tilde{P}(Y)=0$或$\tilde{P}(Y)=\infty$；

5） 对任意的$A\epsilon\mathscr{B}^m$，有

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(A-t)>0)L(dt)=0;$$

6） 对任意的$Y_1\epsilon\mathbf{N}$，$Y_2\epsilon\mathbf{N}$成立：

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\left|P(Y_1\cap T_tY_2)-P(Y_1)P(Y_2)\right|L(dt)=0;$$

7） 对任意Y_1，$Y_2\epsilon\mathbf{N}$有：

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}P(Y_1\cap T_tY_2)L(dt)=P(Y_1)P(Y_2).$$

证明 1)⇒2)。如果$P=P_1*P_2$，其中P_1与P_2都是平稳无穷可分分布，而$0<\tilde{P}_2(N)<\infty$，则

$$P=P_1*\left(e^{-\tilde{P}_2(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\tilde{P}_2^k\right)$$

$$=e^{-\tilde{P}_2(N)}P_1+(1-e^{-\tilde{P}_2(N)})P_1*\left(\frac{e^{-\tilde{P}_2(N)}}{1-e^{-\tilde{P}_2(N)}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\tilde{P}_2^k\right),$$

于是由定理10推知P不是遍历的。

2) $\Longleftrightarrow$3)．如果2)成立，则由定理62知P_s是弱奇异的，故$P_{s,2}=\delta_0$；反之，设2)不成立，则存在平稳无穷可分分布P_1，P_2使

$$P=P_1*P_2,\quad \tilde{P}=\tilde{P}_1+\tilde{P}_2,$$

而且$\tilde{P}_2$满足条件$0<\tilde{P}_2(N)<\infty$。于是

$$\int h^*(\mu)\tilde{P}(d\mu)\geqslant\int h^*(\mu)\tilde{P}_2(d\mu)$$

$$=\int h(\mu)\tilde{P}_2(d\mu)=\tilde{P}_2(\mu:\ \mu((0,1]^m)>0)>0,$$

从而

$$\tilde{P}(\mu:\ h^*(\mu)>0)>0,$$

所以$P_{s,2}\neq\delta_0$；于是2)与3)等价。

3)$\Rightarrow$4)．设$Y\in\overline{\mathbf{N}}$但$0<\tilde{P}(Y)<\infty$，则由

$$\tilde{P}(\cdot)=\tilde{P}((\cdot)\cap Y)+\tilde{P}((\cdot)\backslash Y)$$

可知P可表为P_1*P_2，其中$\tilde{P}_2(\cdot)=\tilde{P}((\cdot)\cap Y)$满足$0<\tilde{P}_2(N)<\infty$，这说明 2)不成立，从而$P_{s,2}\neq\delta_0$。

4)$\Rightarrow$5)．首先，令

$$f(\mu)=1_{\{\mu:\mu(A)>0\}}(\mu);$$

则对任意的$t\in R^m$有

$$\int_{\{\mu:\mu(A)>0\}}f(T_{-t}\mu)\tilde{P}(d\mu)=\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>,\quad \mu(A-t)>0);$$

如果对某个$c>0$有

$$\tilde{P}(\mu:\ f^*(\mu)\geqslant c)>0,$$

则由f^*的不变性知$Y=\{\mu:\ f^*(\mu)\geqslant c\}\in\overline{\mathbf{N}}$并且

$$c\tilde{P}(Y)\leqslant\int f^*(\mu)\tilde{P}(d\mu)<\infty,$$

于是 $0<\tilde{P}(Y)<\infty$与4)矛盾。这说明当4)成立时，必有$f^*(\mu)=0$，$(a.e.\ \tilde{P})$。

由于

$$(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}f(T_{-t}\mu)\,L(dt)\leqslant1,$$

应用控制收敛定理推知

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)>0)\,L(dt)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\{\mu:\ \mu(A)>0\}} \{(2n)^{-m} \int_{-n}^{n} \cdots \int_{-n}^{n} f(T_{-t}\mu)\ L(dt)\}\ \tilde{P}(d\mu)$$

$$= \int_{\{\mu:\ \mu(A)>0\}} f^*(\mu)\ \tilde{P}(d\mu) = 0\ .$$

5)⇒6)。首先设 $A\in\mathscr{B}$，Y_1，$Y_2\in_A\mathbf{N}$。则当 $\|t\|$ 充分大时 $A\cap(A-t)=\phi$。因此存在 t_0，使当 $\|t\|\geqslant\|t_0\|$ 时有

$$\begin{aligned} P(Y_1)P(Y_2) &= P(Y_1)\ P(T_tY_2) = P(\mu:\ A\mu\in Y_1)\ P(\mu:\ (A-t)\mu\in T_tY_2) \\ &= {}_AP(\mu:\ \mu\in Y_1)({}_{(A-t)}\ P)(\mu:\ \mu\in T_tY_2) \\ &= ({}_AP\times{}_{(A-t)}P)((\mu_1,\ \mu_2):\ \mu_1\in Y_1,\ \mu_2\in T_tY_2) \\ &= ({}_AP * {}_{(A-t)}P)(Y_1\cap T_tY_2), \end{aligned}$$

应用不等式 $\|\mathscr{U}_{E_1}-\mathscr{U}_{E_2}\|\leqslant 2\|E_1-E_2\|$ 得

$$\begin{aligned} &|P(Y_1\cap T_tY_2)-P(Y_1)P(Y_2)| \leqslant \|{}_{A\cup(A-t)}P - {}_AP * {}_{(A-t)}P\| \\ &\leqslant 2\|{}_{A\cup(A-t)}\tilde{P} - {}_A\tilde{P} - {}_{(A-t)}\tilde{P}\| \leqslant 2\|\tilde{P}({}_{[A\cup(A-t)]}\mu\in(\cdot),\ \mu(A)+\mu(A-t)>0) \\ &\quad - \tilde{P}(A\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0) - \tilde{P}((A-t)\mu\in(\cdot),\ \mu(A-t)>0)\|, \end{aligned} \tag{1}$$

由于 A 与 $A-t$ 不交，从而 $A\mu+(A-t)\mu=[A\cup(A-t)]\mu$，所以

$$\begin{aligned} &\tilde{P}([A\cup(A-t)]\mu\in(\cdot),\ \mu(A)+\mu(A-t)>0) \\ &= \tilde{P}([A\cup(A-t)]\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)=0) \\ &\quad + \tilde{P}([A\cup(A-t)]\mu\in(\cdot),\ \mu(A)=0,\ \mu(A-t)>0) \\ &\quad + \tilde{P}([A\cup(A-t)\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)>0) \\ &= \tilde{P}(A\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)=0) \\ &\quad + \tilde{P}((A-t)\mu\in(\cdot),\ \mu(A-t)>0,\ \mu(A)=0) \\ &\quad + \tilde{P}([A\cup(A-t)]\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)>0), \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} \tilde{P}(A\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0) &= \tilde{P}(A\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)=0) \\ &\quad + \tilde{P}(A\mu\in(\cdot),\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)>0), \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &\tilde{P}((A-t)\mu\in(\cdot),\ \mu(A-t)>0) \\ &= \tilde{P}((A-t)\mu\in(\cdot),\ \mu(A-t)>0,\ \mu(A)=0) \\ &\quad + \tilde{P}((A-t)\mu\in(\cdot),\ \mu(A-t)>0,\ \mu(A)>0). \end{aligned}$$

将这些结果代入(1)得

$$|P(Y_1\cap T_tY_2)-P(Y_1)P(Y_2)| \leqslant 6\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\ \mu(A-t)>0),$$

由此推知对任意的 Y_1，$Y_2\in_A\mathbf{N}$，6)成立。

现取 $A_k\in\mathscr{B}^m$，$k=1,2,\cdots$，$A_k\uparrow R^m$。则对一切Y_1，$Y_2\in\bigcup_k {}_{A_k}\mathbf{N}$，6)仍成立。

现在固定 $Y\in\mathbf{N}$，记一切使下式

$$\lim_{n\to\infty} (2n)^{-m}\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n} |P(Y\cap T_tY')-P(Y)P(Y')|\,L(dt)=0$$

成立的 Y' 为 Γ_Y。

如果 $Y'_k\in\Gamma_Y$，$k=1,2,\cdots$，$Y'_k\uparrow$，令$Y'=\bigcup_k Y'_k$ 则

$$|P(Y\cap T_tY')-P(Y)P(Y')|$$

$$\leqslant|P(Y\cap T_tY'_k)-P(Y)P(Y'_k)|$$

$$+|P(Y)P(Y'_k)-P(Y)P(Y')|+|P(Y\cap T_tY')-P(Y\cap T_tY'_k)|$$

$$\leqslant|P(Y\cap T_tY'_k)-P(Y)P(Y'_k)|+2|P(Y'\setminus Y'_k)|,$$

由此见到$Y'\in\Gamma_Y$。同理可知，当$Y'_k\downarrow$，$Y'_k\in\Gamma_Y$时，则$\bigcap_k Y'_k\in\Gamma_Y$，这说明$\Gamma_Y$是单调类。

又由于$Y_2\in\Gamma_{Y_1}$等价于$Y_1\in\Gamma_{Y_2}$。事实上，

$$\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}|P(Y_1\cap T_tY_2)-P(Y_1)P(Y_2)|L(dt)$$

$$=\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}|P(T_{-t}Y_1\cap Y_2)-P(Y_1)P(Y_2)|L(dt)$$

$$=\int_{-n}^{n}\cdots\int_{-n}^{n}|P(Y_2\cap T_tY_1)-P(Y_1)P(Y_2)|L(dt),$$

这表明当$Y\in\bigcup_k \mathscr{A}_k$N时，$\Gamma_Y\supset\bigcup_k \mathscr{A}_k$N，从而$\Gamma_Y=$N，即6）成立。

6)⇒7）显然。

7)⇒1）见定理10。

下面我们研究一类特殊的平稳分布。

65. 定义 设P是平稳分布，如果对于一切$Y_1, Y_2\in$N，下式

$$\lim_{n\to\infty}P(Y_1\cap T_{t_n}Y_2)=P(Y_1)P(Y_2)$$

对R^m中任何满足$\|t_n\|\to\infty$的点列$\{t_n\}$都成立，则称P是混合的。

由定理64知任何混合的平稳分布都是遍历的。

66. 定理 在N上的平稳无穷可分分布P是混合的，当且仅当对任意的有界集$A\in\mathscr{B}^m$，下式

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(A+t_n)>0)=0$$

对R^m中一切满足$\|t_n\|\to\infty$的$\{t_n\}$都成立。

证明 如果P是混合的，则

$$\lim_{n\to\infty}P(\mu:\ \mu(A)=0,\mu(A+t_n)=0)$$

$$=\lim_{n\to\infty}P(\mu:\ \mu(A)=0,\ T_{t_n}\mu(A)=0)=(P(\mu:\ \mu(A)=0))^2,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\exp(-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)+\mu(A+t_n)>0))$$

$$=\exp(-2\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0)).$$

但由平稳性得

$$\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)+\mu(A+t_n)>0)$$
$$=\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\ \mu(A+t_n)=0)$$
$$+\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\ \mu(A+t_n)>0)+\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)=0,\ \mu(A+t_n)>0)$$
$$=\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0)+\tilde{P}(\mu:\ \mu(A+t_n)>0)-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(A+t_n)>0)$$
$$=2\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0)-\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(A+t_n)>0),$$

所以得

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(A+t_n)>0)=0.$$

反之，如果上式成立，则仿定理64中 5)⇒6)的证明可证：对任意$Y_1,Y_2\in\mathbf{N}$有

$$\lim_{n\to\infty}|P(Y_1\cap T_{t_n}Y_2)-P(Y_1)P(Y_2)|=0,$$

即P是混合的。

67．定理 一切正则平稳无穷可分分布都是混合的。

证明 设A是R^m中的有界Borel 集．由于P是正则平稳无穷可分分布，所以

$$0=\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(R^m)=\infty)$$
$$=\lim_{j\to\infty}\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\ \mu(R^m\backslash S_j)>0),$$

其中S_j，$j=1,2,\cdots$，是以$(0,\cdots,0)$为中心以正整数j为半径的开球。

当j固定时，如果$\|t_n\|\to\infty$，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\tilde{P}(\mu:\mu(A)>0,\mu(A+t_n)>0)$$
$$\leqslant\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\ \mu(R^m\backslash S_j)>0),$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty}\tilde{P}(\mu:\mu(A)>0,\ \mu(A+t_n)>0)$$
$$\leqslant\lim_{j\to\infty}\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(R^m\backslash S_j)>0)$$
$$=\tilde{P}(\mu:\ \mu(A)>0,\mu(R^m)=\infty)=0.$$

§13. 平稳无穷可分点过程的样本强度

68．定理 设$E\in\mathscr{E}_+$且是平稳的，$E(\mu:\ S(\mu)=+\infty)=0$，则$\mathscr{U}_E(\mu:\ S(\mu)<\infty)=1$，并且

$$\sigma_{\mathscr{U}_E}=\mathscr{U}_{\sigma_E},$$

其中$\mathscr{U}_{\sigma_E}$是$[0,\infty)$上的分布，

$$\mathscr{U}_{\sigma_E}=\exp(-\sigma_E([0,\infty)))\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\sigma_E)^k.$$

证明 因为

$$E^n(\mu:\ S(\mu)<\infty)=(E(\mu:\ S(\mu)<\infty))^n=(E(N))^n,$$

所以

$$\mathscr{U}_E(\mu: S(\mu)<\infty)=1;$$

又因为

$$\sigma_{(E^n)}=(\sigma_E)^n, \qquad \sigma_{E_1+E_2}=\sigma_{E_1}+\sigma_{E_2},$$

所以

$$\sigma_{(\mathscr{U}_E)}=\sigma_{\left(e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}E^k\right)}=e^{-E(N)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\sigma_E)^k=\mathscr{U}_{(\sigma_E)}.$$

69. 定理 设P是平稳无穷可分分布，满足$i_P<\infty$。则P是遍历的，当且仅当

$$S(\mu)=i_P, \ (a.e.P).$$

证明 如果P是遍历的，则由定理6及定理10知

$$S(\mu)=i_P, \ (a.e.P).$$

反之，如果P不是遍历的，则由定理64知P可表为如下形式

$$P=\mathscr{U}_E*Q,$$

其中E,Q都是平稳的，而E满足

$$E\in\mathscr{E}_+, \ E(0)=0, \ \mathscr{U}_E\neq\delta_0.$$

于是得

$$\sigma_P=\sigma_Q*\sigma_{\mathscr{U}_E}=\alpha\sigma_Q+(1-\alpha)\gamma,$$

其中

$$0<\alpha=\exp(-\sigma_E([0,\infty)))<1,$$

和

$$\gamma=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\sigma_E)^k*\sigma_Q.$$

现在如设$\sigma_P(\cdot)=\delta_{i_P}(\cdot)$，则

$$\alpha\sigma_Q+(1-\alpha)\gamma=\delta_{i_P}.$$

因为δ_{i_P}的测度集中于点i_P，所以只能有

$$\sigma_Q=\delta_{i_P} \text{ 即} i_Q=i_P,$$

但又因为$i_P=i_Q+i_{\mathscr{U}_E}$，所以$i_{\mathscr{U}_E}=0$从而$\mathscr{U}_E=\delta_0$这便导出矛盾，所以$S(\mu)=i_P(a.e.P)$必然推出$P$的遍历性。

70. 定理 设P是平稳无穷可分分布，满足$i_P<\infty$，则σ_P可作如下的分解：

$$\sigma_P=\delta_{(i_{P_r}+i_{P_{s,1}})}*\mathscr{U}_E,$$

其中

$$E(\cdot)=\tilde{P}(\mu: S(\mu)\in(\cdot)\setminus\{0\}).$$

证明 当$i_P<\infty$时，有$i_P=i_{\bar{P}}$。由定理69知

$$\sigma_P=\sigma_{(P_r*P_{S,1})}*\sigma_{P_{S,2}}=\delta_{(i_{P_r}+i_{P_{S,1}})}*\sigma_{P_{S,2}},$$

下面证明$\sigma_{P_{S,2}}=\mathscr{U}_E$，而$E(\cdot)=\bar{P}(\mu: S(\mu)\in((\cdot)\setminus\{0\}))$.

设

$$P_{S,2}=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_n},$$

其中$E_n\in\mathscr{E}_+$，$E_n(0)=0$，且E_n为平稳的，$n=1,2,\cdots$.

如果$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\in N$且$S(\mu)$存在，则

$$S(\mu)=S\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{k}S(\mu_n),$$

所以

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}S(\mu_n),$$

从而

$$i_{P_{S,2}}=\int S(\mu)\,P_{S,2}(d\mu)$$

$$=\int S\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\right)\left(\mathop{\times}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_n}(d\mu_n)\right)\geqslant\int\sum_{n=1}^{\infty}S(\mu_n)\left(\mathop{\times}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{E_n}(d\mu_n)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int S(\mu_n)\,\mathscr{U}_{E_n}(d\mu_n)=\sum_{n=1}^{\infty}i_{E_n}=i_{P_{S,2}},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}S(\mu_n)=S\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\right),\quad (a.e.\ P_{S,2}),$$

从而

$$\sigma_{P_{S,2}}=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\sigma_{\mathscr{U}_{E_n}}=\mathop{*}_{n=1}^{\infty}\mathscr{U}_{\sigma_{E_n}}=\mathscr{U}_E,$$

其中

$$E(\cdot)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{E_n}((\cdot)\setminus\{0\})=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(\mu: S(\mu)\in(\cdot)\setminus\{0\})$$

$$=\bar{P}_{S,2}(\mu: S(\mu)\in((\cdot)\setminus\{0\}))=\bar{P}(\mu: S(\mu)\in((\cdot)\setminus\{0\})).$$

§14. 平稳无穷可分分布的 Palm 测度

71. 设 P 是平稳无穷可分分布，则 $\tilde{P}$ 是平稳的，而且

$$\tilde{P}=\tilde{P}_r+\tilde{P}_{s,1}+\tilde{P}_{s,2}.$$

下面分别以 P^0，$(\tilde{P})^0$，$(\tilde{P}_r)^0$，$(\tilde{P}_{s,1})^0$，…，记 P，$\tilde{P}$，$\tilde{P}_r$，$\tilde{P}_{s,1}$，…，的 Palm 测度，而以 P_0，$(\tilde{P})_0$，$(\tilde{P}_r)_0$，$(\tilde{P}_{s,1})_0$，…，记相应的 Palm 分布。

仍令

$$h(\mu)=1_{(\mu:\mu([0,1)^m)>0)}(\mu).$$

则下列事实是明显的：

$(\tilde{P}_r)^0=(\tilde{P})^0(\mu\colon\mu\in(\cdot),\ \mu(R^m)<\infty)$；

$(\tilde{P}_{s,1})^0=(\tilde{P})^0(\mu\colon\mu\in(\cdot),\ \mu(R^m)=\infty,\ h^*(\mu)=0)$；

$(\tilde{P}_{s,2})^0=(\tilde{P})^0(\mu\colon\mu\in(\cdot),\ \mu(R^m)=\infty,\ h^*(\mu)>0)$；

P 是 Poisson 分布当且仅当 $(\tilde{P})^0(\mu\colon\mu(R^m)\neq1)=0$；

P 是 G-P 分布当且仅当 $(\tilde{P})^0(\mu\colon\mu(R^m)>2)=0$；

P 是正则无穷可分分布当且仅当 $(\tilde{P})^0(\mu\colon\mu(R^m)=\infty)=0$；

P 是奇异无穷可分分布当且仅当 $(\tilde{P})^0(\mu\colon\mu(R^m)<\infty)=0$；

P 是遍历的无穷可分分布当且仅当 $(\tilde{P})^0(\mu\colon h^*(\mu)>0)=0$。

72. 引理 设 V 是 $R^m\times N$ 上的 σ 有限测度，H 是 $\mathbf{N}$ 上的 σ 有限平稳测度，则

$$T(V\otimes H)=(TV)\otimes H.$$

证明 通过映象

$$((a,\ \mu_1),\ \mu_2)\frown(a,\ \mu_1+\mu_2)$$

将 $V\times H$ 变为 $V\otimes H$，再通过映象

$$(a,\ \mu)\frown(a,\ T_a\mu)$$

就变为 $T(V\otimes H)$。

另一方面，由平稳性，映象

$$((a,\ \mu_1),\ \mu_2)\frown((a,\ \mu_1),\ T_a\mu_2)$$

将 $V\times H$ 变为它自己，而映象

$$((a,\ \mu_1),\ \mu_2)\frown((a,\ T_a\mu_1),\ \mu_2)$$

变 $V\times H$ 为 $(TV\times H)$，而

$$((a,\ \mu_1),\ \mu_2)\frown(a,\ \mu_1+\mu_2)$$

变 $TV\times H$ 为 $TV\otimes H$。

由于这个引理及引理 V.8，当 H_1，H_2 都是 σ 有限测度时，有

$$\mathscr{C}_{H_1*H_2}=\mathscr{C}_{H_1}\otimes H_2+\mathscr{C}_{H_2}\otimes H_1,$$

从而

$$T\mathscr{C}_{H_1*H_2}=(T\mathscr{C}_{H_1})\otimes H_2+(T\mathscr{C}_{H_2})\otimes H_1.$$

73. 推论 设 H_1，H_2 都是 $\mathbf{N}$ 上的 σ 有限测度，且同为平稳的。则

$$(H_1*H_2)^0=H_1^0*H_2+H_2^0*H_1.$$

证明 由上面所得的等式及定理24得

$$L\times(H_1 * H_2^0)=(L\times H_1^0)\otimes H_2+(L\times H_2^0)\otimes H_1$$

$$=L\times(H_1^0 * H_2+H_2^0 * H_1).$$

下述定理刻划平稳无穷可分分布的 Palm 测度。

74. 定理 设 P 是平稳分布，它是无穷可分的，当且仅当存在 **N** 上的 σ 有限测度 Q，使

$$P^0=Q * P,$$

其中

$$Q=(\tilde{P})^0.$$

证明 设 P 是平稳无穷可分分布，则由定理 V.9知

$$L\times P^0=T\mathscr{C}_P=T(\mathscr{C}_{\tilde{P}}\otimes P)=(T\mathscr{C}_{\tilde{P}})\otimes P=L\times((\tilde{P})^0 * \tilde{P}),$$

从而

$$P^0=(\tilde{P})^0 * P.$$

反之，设 $P^0=Q * P$，则

$$Q(\mu:\mu(0,\cdots,0)=0)=P^0(\mu:\mu(0,\cdots,0)=0)=0,$$

从而$Q(N\backslash N^0)=0$.

现在

$$T\mathscr{C}_P=L\times P^0=L\times(Q * P)=(L\times Q)\otimes P=TV\otimes P,$$

其中 $TV=L\times Q$，由引理72知

$$T\mathscr{C}_P=T(V\otimes Q),$$

所以$\mathscr{C}_P=V\otimes Q$.于是由定理 V.10知P是无穷可分的，并且 $V=\mathscr{C}_{\tilde{P}}$ 即

$$L\times Q=T\mathscr{C}_{\tilde{P}}=L\times(\tilde{P})^0.$$

75. 推论 设P是平稳分布，$0<i_P<\infty$,则它是无穷可分的，当且仅当存在平稳分布H使

$$P_0=H * P,$$

其中

$$H=(\tilde{P}).$$

这个推论由前述定理及Palm分布的定义即得到。

§15. 平稳混合型Poisson过程

76. 设P是平稳分布，而且是混合型Poisson分布．即存在$\lambda\in M$以及$[0,\infty)$上的分布σ使

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma(dl).$$

这时，对于任意的$A\in\mathscr{B}^m$有

$$I_P(A)=\int I_{P_{l\lambda}}(A)\sigma(dl)=\lambda(A)\int l\sigma(dl),$$

当$\int l\sigma(dl)<\infty$时，推知$\lambda(A)=c\cdot L(A)$.其实这个结论对于$\int l\sigma(dl)=\infty$时亦成立。

77. 引理 设P是平稳混合型Poisson分布，则P可表为如下形式：

$$P(\cdot)=\int P_{lL}(\cdot)\sigma(dl),$$

其中σ是$[0,\infty)$上的分布。

证明 因为P是混合型Poisson分布，所以存在$[0,\infty)$上的分布σ'及$\lambda\in M$使

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma'(dl).$$

又因为P是平稳的，所以

$$P(\mu:\ \mu(A)=0)=P(\mu:\ \mu(A+t)=0)$$

对任意$t\in R^m$都成立，即

$$\int e^{-l\lambda(A)}\sigma'(dl)=\int e^{-l\lambda(A+t)}\sigma'(dl).$$

如果$\lambda=0$或者$\sigma'=\delta_0$则

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma'(dl)=\int P_{lL}(\cdot)\delta_0(dl),$$

如果$\lambda\neq0$且$\sigma'(l\neq0)>0$,则可推知

$$\lambda(A)=\lambda(A+t),$$

从而$\lambda(\cdot)=cL(\cdot)$,而$c>0$是某常数。于是

$$P(\cdot)=\int P_{l\lambda}(\cdot)\sigma'(dl)=\int P_{l,cL}(\cdot)\sigma'(dl)=\int P_{lL}(\cdot)\sigma(dl),$$

其中σ是σ'在映象$l\frown cl$之下的象。

78. 引理 设P是平稳的G_λ型分布，则P是平稳的混合型Poisson分布，即

$$P(\cdot)=\int P_{lL}(\cdot)\sigma(dl).$$

证明 由定理Ⅴ.26知道，如果$\lambda(R^m)=\infty$,则G_λ型分布就是混合型Poisson分布，由前述引理知，此时$P=G_\lambda$可表为所求的形式。

如果$0<\lambda(R^m)<\infty$,不失一般性可设$\lambda(R^m)=1$.这时由定理Ⅴ.28知$P=G_\lambda$有如下形式：

$$P=\sum_{k=0}^{\infty}P_{R^m}(k)Q_\lambda^k.$$

由于P是平稳的，故

$$P(\mu:\ \mu(A)=0)=P(\mu:\ \mu(A+t)=0)$$

对任意$t\in R^m$成立，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_{R^m}(k)Q_\lambda^k(\mu:\ \mu(A)=0)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{R^m}(k)Q_\lambda^k(\mu:\ \mu(A+t)=0),$$

于是知

$$Q_\lambda(\mu:\ \mu(A)=0)=Q_\lambda(\mu:\ \mu(A+t)=0),$$

根据Q_λ的定义，

$$Q_\lambda(\mu:\ \mu(A)=0)=\lambda(R^m\backslash A),$$

所以

$$\lambda(R^m\backslash A)=\lambda(R^m\backslash(A+t))$$

即

$$\lambda(A)=\lambda(A+t),\quad 凡 t\in R^m,$$

这与$0<\lambda(R^m)<\infty$的假定矛盾。这说明平稳G_λ型分布只能有$\lambda(R^m)=0$或$\lambda(R^m)=\infty$，因而一定可表为所要求的形式。

总结上述结果，我们得到下面的定理。

79. 定理 设$P\in\mathscr{P}_N$，则下列命题等价：

1) 存在$[0,\infty)$上的分布σ使

$$P(\cdot)=\int P_{lL}(\cdot)\sigma(dl);$$

2) P是平稳的混合型Poisson分布；

3) P是平稳的G_λ型分布。

下面我们寻求平稳的混合型Poisson分布的 Palm 测度的一般形式。对于平稳的Poisson分布P_{lL}，$l\geqslant 0$，由定理74知，

$$(P_{lL})^0=(\tilde{P}_{lL})^0*P_{lL}.$$

又由定理24知，对任意$A\in\mathscr{B}^m$，$0<L(A)<\infty$有

$$(\tilde{P}_{lL})^0(\cdot)=(Q_{lL})^0(\cdot)=\frac{1}{L(A)}\iint 1_A(a)\delta_{T_a\mu}(\cdot)\mu(da)Q_{lL}(d\mu)$$

$$=\frac{1}{L(A)}\iint 1_A(a)\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}}(\cdot)\delta_t(da)l\cdot L(dt)=l\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}}(\cdot),$$

从而Poisson分布P_{lL}，$l\geqslant 0$的Palm测度是

$$(P_{lL})^0=(l\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}})*P_{lL}.$$

80. 定理 $\mathbf{N}$上的分布P具有如下形式

$$P(\cdot)=\int P_{lL}(\cdot)\sigma(dl)$$

的充要条件为：存在$\mathbf{N}$上的σ有限测度H，使

$$P^0=(\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}})*H,$$

并且 $H(\cdot)=\int lP_{lL}(\cdot)\sigma(dl)$.

证明 必要性 任意选取$A\in\mathscr{B}^m$，使$L(A)>0$，由定理24，对任意的$Y\in\mathbf{N}^0$有

$$P^0(Y)=\frac{1}{L(A)}\iint 1_A(a)1_Y(T_a\mu)\mu(da)P(d\mu)$$

$$=\int\frac{1}{L(A)}\iint 1_A(a)1_Y(T_a\mu)\mu(da)P_{lL}(d\mu)\sigma(dl)$$

$$=\int(P_{lL})^0(Y)\sigma(dl)=(\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}})*H,$$

其中 $H(\cdot)=\int lP_{l_L}(\cdot)\sigma(dl)$.

充分性 如果H是σ有限的，并且

$$P_0=(\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}})*H.$$

则

$$T\mathscr{C}_P=L\times P^0=L\times(\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}}*H)$$

$$=(\int\delta_a\times\delta_{\delta_{(0,\cdots,0)}}(\cdot)L(da))\otimes H,$$

由引理72得

$$\mathscr{C}_P=(\int(\delta_a\times\delta_{\delta_a})(\cdot)L(da))\otimes H=\int(\delta_a\times(\delta_{\delta_a}*H))(\cdot)L(da),$$

从而$\mathscr{C}_P^T=L\times H$，于是由定理Ⅴ.39及定理79知$P$可表为如下形式：

$$P(\cdot)=\int P_{l_L}(\cdot)\sigma(dl).$$

§16. 平稳正则无穷可分分布

81. 引理 设$\gamma_k(k\geqslant 2)$是$((R^m)^k,(\mathscr{A}^m)^k)$上的局部有限对称测度，满足：

$$\gamma_k((A_1+t)\times\cdots\times(A_k+t))=\gamma_k(A_1\times\cdots\times A_k),$$

凡 $t\in R^m,A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{A}^m$.又对所有$A\in\mathscr{B}^m$,$\gamma_k(A\times(R^m)^{k-1})<\infty$.则$\gamma_k$可以表为如下形式

$$\gamma_k=(L\times C_k)\varphi_k^{-1},$$

其中L是$(R^m,\mathscr{A}^m)$上的Lebesgue测度，C_k是$((R^m)^{k-1},(\mathscr{A}^m)^{k-1})$上的局部有限对称测度，而$\varphi_k$：$(R^m)^k\frown(R^m)^k$是如下的变换：

$$\varphi_k:\ (x_1,\cdots,x_k)\frown\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{\sqrt{k}},\ \frac{x_1-x_2}{\sqrt{k}},\cdots,\frac{x_1-x_k}{\sqrt{k}}\right)$$

证明 记

$$\tilde{\gamma}_k=\gamma_k\varphi_k^{-1},\qquad(k\geqslant 2),$$

则对任意的$t\in R^m$,任意的$A\in\mathscr{A}^m$及$B\in(\mathscr{A}^m)^{k-1}$,有

$$\tilde{\gamma}_k((A+t)\times B)=\gamma_k(A\times B),$$

从而对于固定的$B\in(\mathscr{A}^m)^{k-1}$,有

$$\tilde{\gamma}_k(\cdot\times B)=L(\cdot)\times C_k(B).$$

容易验证集函数$C_k(\cdot)$是$((R^m)^{k-1},(\mathscr{A}^m)^{k-1})$上的局部有限对称测度。于是

$$\tilde{\gamma}_k=L\times C_k,\quad \gamma_k=(L\times C_k)\varphi_k.$$

82. 现在设P是R^m上的正则无穷可分分布。由定理Ⅱ.54可知P具有如下形式的Laplace变换：

$$-\log\Psi_P(f)=\sum_{k=1}^{\infty}\int(1-\exp(-\sum_{i=1}^{k}f(a_i)))\gamma_k(da_1\times\cdots\times da_k).$$

由诸$\gamma_k(k\geqslant 1)$与典则测度$\tilde{P}$的关系，可知当P为平稳分布时，有

$$\gamma_1(A+t)=\gamma_1(A),\quad t\in R^m, A\in\mathscr{A}^m;$$

$$\gamma_k(A_1+t)\times\cdots\times(A_k+t))$$
$$=\gamma_k(A_1\times\cdots\times A_k),\quad k\geqslant 2,\quad t\in R^m,\quad A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{A}^m;$$

于是知存在非负实数c，使

$$\gamma_1=c\cdot L,$$

而对于$k\geqslant 2$，由前述引理可知γ_k可以表为，

$$\gamma_k=(L\times C_k)\varphi_k\ .$$

利用这点并结合第四章中的收敛定理，可以导出无穷小三角序列收敛于平稳正则无穷可分分布，特别是平稳Gauss-Poisson分布的条件。

参 考 文 献

〔1〕Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, 1968.

〔2〕Kallenberg, O., *Random Measures*, Academic Press, 1976.

〔3〕Matthes, K., Kerstan, J. and Mecke, J., *Infinitely Divisible Point Processes*, Wiley, 1978.

〔4〕Neveu, J., *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*, Holden-Day, 1965.

〔5〕Parthasarathy, K. R., *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, 1967.

〔6〕Jagers, P., *Aspects of Random Measures and Point Processes*, In «*Advances in Probability and Related Topics*», 3, 179—239, Marcel Dekker, 1974.

〔7〕Hewitt, E. and Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer Verlag, 1966.

〔8〕Kurtz, T. G., *Point Processes and Completely Monotone Set Functions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 57—67(1974).

〔9〕Хинчин, А. Я., Математические Методы Теории Массового Обслуживания, Изд. АН СССР, 1955. (中译本：张理千、殷涌泉译，公用事业理论的数学方法，科学出版社)

〔10〕Прохоров, Ю. В., Сходимость Случайных Процессов и Предельные Теоремы Теории Вероятностей, Теор. Вероят и ее Примен., 1, 177—238 (1956).

〔11〕梁之舜，Delphic半群与随机点过程，数学年刊 5A,127—132(1984).

〔12〕戴永隆，关于Poisson过程一个定理的简单证明，中山大学学报（自然科学版），1981年 第二期，26—29.

〔13〕戴永隆，随机测度的绝对连续性和相互奇异性，数学年刊，3，241—248(1982).

〔14〕戴永隆，距离空间上测度的局部弱收敛，数学学报，25:6 746—753(1982).

〔15〕Dai Yonglong and Pei Xiang., *On the Convergence for Null-Arrays of the Point Processes*, Chin Ann of Math., 5B, 67—72(1984).

基本符号索引